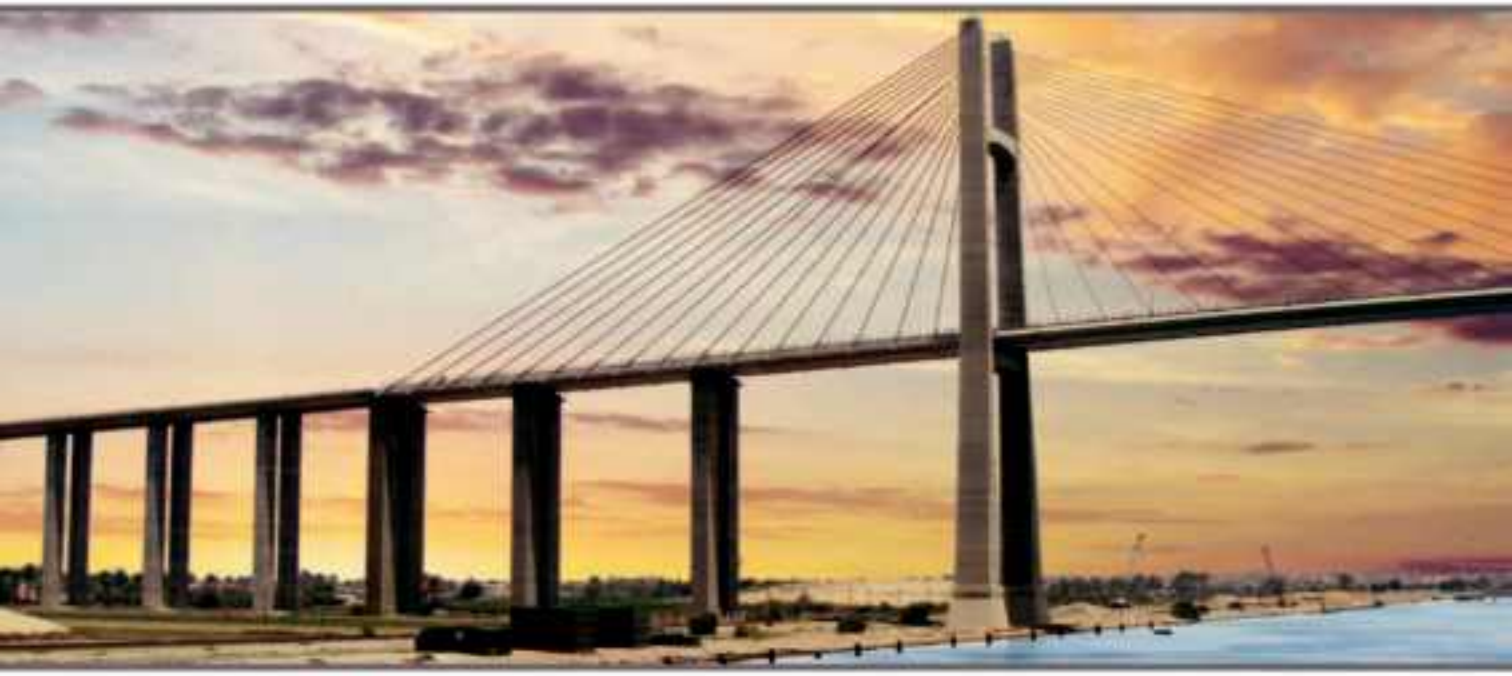
République Arabe d'Égypte
Ministère de L'Éducation de
L'Enseignement et L'Enseignement technique
Administration centrale des affaires du livre

Mathématiques

Livre de l'élève

Première secondaire **Deuxième semestre**



Les mathématiques ont des applications pratiques dans différents domaines dont la construction de routes, de ponts, l'urbanisme, l'élaboration de plans qui repose sur des lignes parallèles et des lignes qui les coupent selon une proportion entre la longueur réelle et la longueur représentée sur le plan.

La photo montre le pont Al Salam qui relie les deux rives du canal de suez

2019 - 2020

Rédigé par

M. **Omar Fouad Gaballa**

Prof.Dr. **Afaf Abo-ElFoutoh Saleh**

Prof.Dr. **Nabil Tawfik Eldhabai**

Dr. **Essam Wasfy Rouphaiel**

M. **Serafiem Elias Skander**

M. **Kamal yones kabsha**

Révisé par

Hussin Mohamed Hussin

Conseiller pour les mathématiques

Fathi Ahmed Chehata

Adel Mohmed Hamza

Nasser Saad Zaghloul

Première édition 2013
Dépôt légal No : 2013 / 14856
I.S.P.N. 978 - 977 - 706 - 010 - 3

INTRODUCTION

بسم الله الرحمن الرحيم

En présentant ce manuel, nous sommes heureux de vous clarifier la philosophie dont nous nous sommes inspirés pour édifier son contenu, en la résumant dans ce qui suit :

1. S'assurer que l'objectif essentiel de ce manuel et d'aider l'apprenant à résoudre les problèmes et à prendre les décisions, dans sa vie quotidienne pour une meilleure participation dans la société.

2. S'assurer du principe de la continuité de l'apprentissage tout au long de la vie, faisant en sorte que les élèves acquièrent un mode de pensée scientifique, et qu'ils pratiquent un apprentissage mêlé de désir et de convoitise. Ceci en misant sur le développement de leur habilitée à résoudre les problèmes, à déduire et démontrer les résultats, à utiliser l'auto apprentissage, l'apprentissage actif avec l'esprit de groupe, la discussion et le dialogue, le respect de l'opinion de l'autre, l'objectivité dans le jugement et la définition de quelques activités et réalisations nationales.

3. Présenter une vue globale consolidée entre la science, la technologie et la société (STS) qui reflète le rôle du progrès scientifique dans le développement de la société locale, en plus de cela l'insistance sur un comportement consciencieux dans l'utilisation des outils technologiques.

4. Développement des tendances positives envers les mathématiques, leurs études et l'estimation des savants.

5. Munir les élèves d'une culture complète pour une meilleure utilisation des ressources disponibles dans l'environnement.

6. Renforcer les bases de la connaissance et le développement des méthodes de pensée, développer les capacités scientifiques, ne pas surcharger inutilement et s'éloigner du par cœur. Dans ce but, il est important de mettre en valeur les notions et les principes généraux, les méthodes de recherche, de résolution, de la pensée qui distinguent les mathématiques du reste.

A la lumière de ce qui précède, ce manuel est organisé comme suit :

★ Division du manuel en unités complètes reliées entre elles. Chacune des ces unités a une introduction qui éclaircit son objectif, son contenu, son organisation et le lexique employé, en arabe et en anglais. Elles sont divisées en leçons dont l'objectif est indiqué à l'élève sous la rubrique 'A apprendre'. Chaque leçon commence par l'idée essentielle du contenu et l'exposition de la matière d'une manière progressive. Ces unités comportent aussi un ensemble d'activités, du niveau de l'élève, qui soulignent le lien entre différentes matières ainsi qu'avec la vie pratique. Ces activités prennent en compte les capacités des élèves, leurs différences individuelles et renforcent le travail en groupe pour compléter le sujet.

★ Nous avons proposé, dans chaque leçon, des exemples à difficulté croissante, différents niveaux de réflexion, des exercices d'entraînement sous la rubrique 'essaie de résoudre' et chaque leçon se termine par 'Test de compréhension'.

★ Chaque unité se termine par un résumé contenant les notions et les instructions employées.

Finalement, nous espérons qu'avec ce manuel nous accomplirons le bien pour nos élèves et pour notre cher Égypte. Dieu nous est témoin, qu'il nous guide vers le bon chemin.

Plan du livre pour le deuxième semestre

No de l'unité	*Les leçons inclus dans l'unité*	*les concepts inclus*	*Les opérations intellectuelles et les capacités de mémoire inclus*	*Le lien avec les autres sciences*
1 Les matrices	1 - 1 **Organisation des informations en des matrices**	Matrice - Élément - matrice de lignes - matrice de colonne matrice carrée - matrice nulle - Matrices égales - Matrices symétriques - Matrices antisymétriques	• Réflexion critique p8 - p10 • Réflexion algébrique (durant la présentation dans la classe)	• Lien au consommateur p7 - p 10 • Lien aux mathématiques p7 • Lien a l'énergie p7 • Line au commerce p13 • Line a la technologie p13
	1 - 2 **Addition et soustraction des matrices**	Addition des matrices soustraction des matrices	• Réflexion algébrique (durant la présentation de la leçon)	• Lien à la statistique p14 • Lien à la technologie p17
	1 - 3 **Multiplication des matrice**	Multiplication des matrices	• Réflexion critique p19 Réflexion algébrique durant la présentation de la leçon	• Lien au consommateur p18 • Lien au tourisme p20
	1 - 4 **Déterminants**	Déterminant - Déterminant d'ordre deux - Déterminant d'ordre trais - diagonale principale du déterminant - L'autre diagonale du détermi - nant - matrice des coefficients	• Réflexion algébrique (durant la présentation de la leçon)	• Lien a la géométrie p15
	1 - 5 **Inverse de la matrice**	Inverse de la matrice -Matrice unité -Equation matricielle -Matrice des variables -Matrice des constantes	• Réflexion critique p30 • Réflexion algébrique • (Durant la présentation de la leçon)	• Lien au consommateur p34
2 La programmation linéaire	2 - 1 **Inéquations linéaires**	Inéquation linéaire droite - droite forentière pointillée linéaire a une inconnue - Inéquation linéaire à deux inconnues	• Réflexion critique p42 • Réflexion algébrique (durant la)	• Applications dans la vie p42 • Lien au consommateur p42
	2 - 2 **Résolution d'un d'inéquations linéaires graphiquement**	Système d'inéquations linéaires - Région de solution - graphique	• Réflexion critique p42 • Réflexion algébrique (durant la présentation de la leçon)	• Lien a la vie p46 - 47 • Lien p47 aux métiers
	2 - 3 **Programmation linéaire et l'optimisation**	Programmation linéaire contraintes limitées contraintes illimitées optimisation	• Réflexion algébrique (durant la présentation de la leçon)	• Lien au temps • Lien a l'administration • Lien au consommateur p50 • Lien a l'industrie • Lien a' l'agriculture
3 Les vecteurs	3 - 1 **Quantités scalaires quantités vectorielles segment orienté**	Les quantités scalaires les quantités vectorielles le segmente orienté	• Quantité scalaires • Vecteur - distance • déplacement - sens	
	3 - 2 **Vecteurs**	Vecteur - vecteur de position couple - valeur absolue - Norme - vecteur équivalent - forme polaire - vecteur de l'unité	• Réflexion logique Réflexion géométriques (pendant la présentation de la leçon)	

No de l'unité	Les leçons inclus dans l'unité	les concepts inclus	Les opérations intellectuelles et les capacités de mémoire inclus	Le lien avec les autres sciences
Les vecteurs (suite)	3 - 3 **Opérations sur les vecteurs**	Addition de 2 vecteurs soustraction de 2 vecteurs Règle du triangle Règle du parallélogramme	• Réflexion logique Réflexion géométrique (pendant la présentation de la leçon)	
	3 - 4 **Applications sur les vecteurs**	Force résultante - les forces parallèles - vitesse relative	• Réflexion logique Réflexion géomé - trique (pendant la présentation de la leçon)	
4 La dartre	4 - 1 **Partage d'un segment**	Partage de l'intérieure partage de l'extérieure Rapport de partage	• Réflexion logique Réflexion géométrique (pendant la leçon)	
	4 - 2 **Équation d'une droite**	Vecteur de direction d'une droite Équation vectorielle - Équation paramétrique - Équation cartésienne - Équation générale.	• Réflexion critique 84 , 92 • Réflexion logique • Réflexion géométrique	
	4 - 3 **Mesure de l'angle de deux droites**	Angle de deux droites	• Réflexion logique Réflexion géométrique	• Le lien à la géométrie p95
	4 - 4 **Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point à une droite**	Colonne (perpendiculaire) ligne droite	• Réflexion logique Réflexion géométrique	• le lien aux routes p95
	4 - 5 **L'équation générale de la droite passant par le point d'intersection de deux droites**	Point d'intersection de deux droites - Équation générale	• Réflexion logique Réflexion géométrique	• Le lien à la technologie
5 La trigonométrie	5 - 1 **Identités trigonométriques**	Équation Identité	• Réflexion logique (pendant la leçon)	
	5 - 2 **Résolution des équations trigonométriques**	Équation trigonométrique Résolution générale	• Réflexion logique (pendant la leçon)	
	5 - 3 **Résolution d'un triangle rectangle**	Résolution du triangle	• Réflexion critique Réflexion logique (pendant la leçon)	• Le lien a la géométrie p45
	5 - 4 **Angles d'élévation et d'abaissement**	Angle d'élévation Angle d'abaissement	• Réflexion logique (pendant la leçon)	
	5 - 5 **Secteur circulaire**	Secteur circulaire	• Réflexion critique p120 • Réflexion logique	
	5 - 6 **Segment circulaire**	Segment circulaire	• Réflexion logique	• Le lien à l'agriculture l'ornement p125
	5 - 7 **Aires**	Quadrilatère régulier	• Réflexion logique	• Le lien à la technologie p127

Les contenus

unité 4 Droite

unité 5 Trigonométrique

Algèbre Unité 1

Matrices

Objectifs de l'unité

A la fin du chapitre, l'élève doit être capable de :

- Connaître le concept de la matrice et ses dimensions.
- Connaître quelques matrices spéciales (la matrice ligne – la matrice colonne – la matrice carrée – la matrice nulle – la matrice diagonale – la matrice d'unité – la matrice symétrique et la matrice antisymétrique)
- Savoir multiplier une matrice par un nombre réel.
- Connaître l'égalité de deux matrices.
- Connaître la transposée d'une matrice.
- Effectuer les opérations de l'addition, de la soustraction et de la multiplication sur les matrices.
- Vérifier les solutions de quelques problèmes contenant des matrices en utilisant les contraintes possibles.
- Résoudre des problèmes de la vie courante en utilisant les matrices.
- Utiliser les matrices dans d'autres domaines.
- Définir le déterminant de la matrice de deuxième et de troisième degré.
- Trouver la valeur du déterminant sous la forme triangulaire.
- Trouver l'inverse de la matrice carrée de degré 2 × 2.
- Résoudre deux équations simultanées en utilisant l'inverse de la matrice.
- Résoudre les équations par la méthode de Cramer.
- Trouver l'aire du triangle en utilisant les déterminants.

Expressions de base

- la matrice
- élément
- la matrice ligne
- la matrice colonne
- la matrice carrée
- la matrice nulle
- l'égalité des matrices
- matrice symétrique
- matrice antisymétrique
- matrice unité
- l'équation matricielle
- matrice des variables
- matrice des constantes
- l'addition des matrices
- la soustraction des matrices
- la multiplication des matrices
- la transposée de la matrice
- déterminant
- déterminant du deuxième degré
- déterminant du troisième degré
- matrice des coefficients
- l'inverse de la matrice

Leçons de l'unité

Leçon (1 – 1) : Organisation des informations en des matrices.

Leçon (1 – 2) : Addition et soustraction des matrices.

Leçon (1 – 3) : Multiplication des matrices.

Leçon (1 – 4) : Déterminants.

Leçon (1 – 5) : Inverse de la matrice.

Matériel utilisé

Une calculatrice scientifique – le programme d'Excel – l'ordinateur.

Historique

Les matrices sont devenues importantes dans la vie, elles sont utilisées dans les différentes branches des sciences, elles sont utilisées pour mettre les connaissances à notre disposition sous forme de tableaux pour les utiliser facilement.

Les matrices sont l'un des sujets des mathématiques importants surtout dans la branche de l'algèbre linéaire et le savant Killy (1821 – 1895) était le premier à utiliser les matrices.

Organigramme de l'unité

1 - 1 Organisation des informations en utilisant les matrices

Apprendre

- Qu'est ce que la matrice ?
- Quelques matrices spéciales (matrice carrée – matrice ligne – matrice colonne – matrice nulle – matrice diagonale – matrice unité)
- Transposée de la matrice.
- La matrice symétrique et antisymétrique.
- L'égalité de deux matrices.
- La multiplication d'un nombre réel par une matrice.

Expression de base

- Matrice
- Élément
- Matrice ligne
- Matrice colonne
- Matrice carrée
- Matrice nulle
- Égalités des 2 matrices
- Matrice symétrique
- Matrice antisymétrique

Matériel et moyens

- Calculatrice électronique.
- Programme d'Excel.
- Ordinateur.
- Calculatrice scientifique.

Réfléchis et discute

Le lien à l'industrie :

Une usine qui produit les différentes pièces constituants des écrans de télévision contient 3 départements qui fabriquent chacun 4 parties essentielles de l'écran A, B, C et D comme suit :

Chaque jour: Le premier département fabrique 75 pièces de A, 135 de B, 150 de C et 215 de D.

Le deuxième département fabrique 100 pièces de A, 168 de B, 210 de C et 282 de D.

Le troisième département fabrique 80 pièces de A, 100 de B, 144 de C et 64 de D.

C'est difficile de se rappeler de ces informations et de comparer entre elles. Alors comment peut-on organiser ces informations pour pouvoir les analyser et en profiter. Il suffit d'écrire sous la forme du tableau suivant pour éclaircir ces connaissances :

les parties

départements	A	B	C	D
1er département	75	135	150	215
2e département	100	168	210	282
3e département	80	100	144	64

Sachant que les nombres de la première ligne représentent la production du premier département des pièces A, B, C et D respectivement. De même les nombres de la seconde ligne représentent la production du deuxième département. Aussi les nombres de la troisième ligne représentent la production du troisième département, alors on peut écrire ces informations du tableau précédent sous forme plus simple comme suit :

$$\begin{array}{r c}
1^{re}\text{ ligne} & \\
2^{ème}\text{ ligne} & \\
3^{ème}\text{ ligne} & \\
&
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 75 & 135 & 150 & 215 \\ 100 & 168 & 210 & 282 \\ 80 & 100 & 144 & 64 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{re} & 2^{ème} & 3^{ème} & 4^{ème} \\ \text{colonne} & \text{colonne} & \text{colonne} & \text{colonne} \end{array}
\end{array}$$

Cette forme est appelée une matrice et les nombres entre les parenthèses sont appelés les éléments de la matrice.

Cette matrice est formée de trois lignes et quatre colonnes :
On l'appelle la matrice de dimension 3×4 (simplement la matrice 3×4) où 3 représente le nombre de lignes et 4 représente le nombre de colonnes. On conclut que le nombre d'éléments de la matrice $= 3 \times 4 = 12$ éléments.

Et maintenant

1- Y-a-t-il une autre méthode pour organiser les données du problème sous une autre forme de matrice ? Explique pourquoi

2- Dans la matrice précédente, quel est élément de la première ligne et de la deuxième colonne ? Quel est l'élément de la deuxième ligne et de la première colonne ?

3- Question ouverte: Donner un exemple d'une matrice sous la forme de 2×3.

A apprendre

Organisation des informations en utilisant les matrices :

La matrice est formée d'un nombre d'éléments (variables ou des nombres) sous forme de lignes et de colonnes entre deux parenthèses. L'ordre des éléments de la matrice est important. On représente la matrice par des lettres majuscules A, B, C,X, Y ... et les éléments par des lettres minuscules a, b, c, x, y, ...

Si nous voulons exprimer un élément qui se trouve dans la ligne i et la colonne j, on peut l'écrire sous la forme de a_{ij}. Par exemple a_{12} se trouve dans la **première ligne** et la **deuxième colonne**. L'élément a_{32} se trouve dans la **troisième ligne** et la **deuxième colonne.**

Dans la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

L'élément (-1) se trouve dans la deuxième ligne et la deuxième colonne et il est noté par a_{22}

L'élément 6 se trouve dans la première ligne et la troisième colonne et il est noté par a_{13}

En général :

La matrice qui est formée de m lignes et n colonnes a pour dimension $m \times n$ ou de l'ordre $m \times n$ ou du genre $m \times n$ (on la lit m fois n tels que m et n sont deux nombres entiers positifs).

Essaie de résoudre

1. Utiliser la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ pour répondre à chacun de ce qui suit :

A Quelle est la dimension de la matrice B ? **B** Quelle est la valeur de b_{12} et de b_{21}?

A apprendre

Représentation des matrices

Si A est une matrice ayant pour dimension $m \times n$, alors on peut écrire la matrice A sous la forme de :

$A = (a_{ij})$, où $i = 1 ; 2; 3; ...; m$

et $j = 1 ; 2; 3; ...; n$

Nous limiterons les études dans les cas où $m \leqslant 3$ et $n \leqslant 3$

Exemple

1. Ecrire tous les éléments des matrices suivantes :

A $A = (a_{ij})$ où $i = 1 ; 2$ et $j = 1; 2; 3$

B $B = (b_{ij})$ où $i = 1 ; 2; 3$ et $j = 1$

C $C = (c_{ij})$ où $i = 1 ; 2$ et $j = 1; 2$

Solution

A $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ matrice de dimension 2×3

B $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}$ matrice de dimension 3×1

C $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ matrice de dimension 2×2

Essaie de résoudre

2. Ecrire tous les éléments des matrices suivantes :

A $A = (a_{ij})$ où $i = 1 ; 2 ; 3$ et $j = 1; 2; 3$

B $B = (b_{ij})$ où $i = 1 ; 2$ et $j = 1$

Exemple

(2) **Le lien au consommateur :** Le tableau suivant indique les prix en L.E. annoncés par un restaurant de trois sortes de sandwiches de différentes tailles:

	Petit	Moyen	Grand
Poulet	8	12	16
Crevette	9	13	17
Poisson filet	7	11	15

A Ecrire ces informations sous forme d'une matrice de sorte que les prix soient dans l'ordre croissant.

B Déterminer la dimension de la matrice.

C Quelle est la valeur de l'élément a_{32}?

Solution

A

$$\begin{array}{l} \\ \text{Poisson} \\ \text{Poulet} \\ \text{Crevette} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Petit} & \text{Moyen} & \text{Grand} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 8 & 12 & 16 \\ 9 & 13 & 17 \end{pmatrix} \end{array}$$

B La dimension de la matrice est 3×3

C L'élément a_{32} se trouve dans la troisième ligne et la deuxième colonne, alors c'est 13.

Essaie de résoudre

(3) L'entraineur de l'équipe de basket-ball de l'école a enregistré le résultat des trois joueurs dans le concours des classes :

Samir : a joué 10 matchs, 20 projets, 5 buts

Hazem : a joué 16 matchs, 35 projets, 8 buts

Karim : a joué 18 matchs, 41 projets, 10 buts

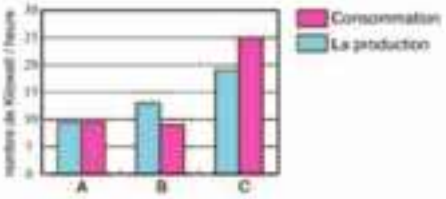
A Représenter ces informations dans une matrice telle que les joueurs soient dans l'ordre croissant suivant les nombres de buts marqués.

B Déterminer la dimension de la matrice. Quelle est la valeur de a_{23}?

Exemple

Organisation des informations statiques en utilisant les matrices

(3) **Le lien à L'énergie** (L'énergie est mesurée en kilowatt/heure). La représentation graphique ci-contre indique la relation entre la production de l'énergie et la consommation de certains pays. Ecrire la matrice qui représente ces informations.



Solution

On suppose que chaque ligne de la matrice représente un pays, chaque colonne représente le niveau de la production et de la consommation.

Les valeurs sont déduites du dessin .

$$\begin{array}{l} \\ \text{pays (A)} \\ \text{pays (B)} \\ \text{pays (C)} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Produit} & \text{Consommation} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9.5 & 9.5 \\ 13 & 9 \\ 19 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

Réflexion critique :

Comment tu peux changer la matrice pour représenter les informations d'autres pays ajoutés ?

Essaie de résoudre

4. Réécrire les informations de l'exemple précédent sous la forme d'une matrice de dimension 2×3, Mettre un titre pour les lignes et les colonnes.
5. Déterminer la différence entre la matrice de dimension 2×3 et de la matrice de dimension 3×2

A apprendre

Quelques matrices spéciales

A **Matrice carrée :** C'est une matrice dont le nombre de lignes est égal au nombre de colonnes par exemple : $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ (matrice carrée de dimension 2×2)

B **Matrice ligne :** C'est une matrice qui a une seule ligne et un nombre quelconque de colonnes par exemple : $(2 \;\; 4 \;\; 6 \;\; 8)$ (matrice ligne de dimension 1×4)

C **Matrice colonne :** C'est une matrice qui a une seule colonne et un nombre quelconque de lignes par exemple : $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$(matrice colonne de dimension 3×1)

D **Matrice nulle :** C'est une matrice dont tous les éléments sont nuls. Elle peut être une matrice carrée ou une matrice quelconque, par exemple :

(0) matrice nulle de dimension 1×1 ; $(0 \;\; 0)$ matrice nulle de dimension 1×2; $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ matrice nulle de dimension 2×1 ; $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice nulle de dimension 2×2 . On symbolise la matrice nulle par un petit rectangle $\boxed{}$.

E **Matrice diagonale :** C'est une matrice carrée dont tous les éléments sont égaux à Zéro sauf les éléments de la diagonale principale, par exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (matrice diagonale de dimension 3×3)

F **Matrice unité :** C'est une matrice dont tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1 et tous les autres sont nuls. Elle est notée par I, par exemple :

(1) , $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices unités.

Essaie de résoudre

6) Ecrire le genre et la dimension de chacune des matrices suivantes :

A $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ B $(1\ 3\ 5\ 7)$ C $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

D $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ E $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ F $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7) Ecrire la matrice nulle de dimension 3×3.

A apprendre

Égalité de deux matrices

Deux matrices A et B sont égales si et seulement si elles ont même dimension et chaque élément de la matrice A est égale à l'élément correspondant de la matrice B. C'est-à-dire $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j.

Exemple

4) A Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas égales car elles ne sont pas de même dimensions.

B $\begin{pmatrix} 1 & x & 2 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 6 & y \end{pmatrix}$ si et seulement si $x = -3$, $y = 5$

C Les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & y \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ Les deux matrices ne peuvent jamais être égales car les éléments correspondants 1 et (-1) ne sont pas égaux

D $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ Les deux matrices sont égales car elles ont même dimensions et leurs éléments correspondants sont égaux.

Essaie de résoudre

8) A Soient $A = \begin{pmatrix} -0.75 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0.2 \\ 0.5 & -2 \end{pmatrix}$. Est-ce que A = B ? expliquer votre réponse.

B Soient $X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Est-ce que X = Y ? expliquer votre réponse

Exemple

Utilisation des égalités des matrices pour la résolution des équations :

5) Si $\begin{pmatrix} 2x-5 & 4 \\ 3 & 3y+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 3 & y+18 \end{pmatrix}$, trouver la valeur de x et y.

Solution

$$\begin{pmatrix} 2x-5 & 4 \\ 3 & 3y+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 4 \\ 3 & y+18 \end{pmatrix}$$

$\because$ Puisque les 2 matrices sont égales, alors les éléments correspondants sont égaux

$2x - 5 = 25$	,	$3y + 12 = y + 18$
$2x = 25 - 5$	,	$3y - y = 18 - 12$
$2x = 20$	,	$2y = 6$
$x = 10$	,	$y = 3$

Réponse : $x = 10$ et $y = 3$

Essaie de résoudre

9 Si $\begin{pmatrix} x+8 & -5 \\ 3 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & -5 \\ 3 & 4y-10 \end{pmatrix}$, trouver la valeur de x et y.

10 **Réflexion critique** Si $(3x \quad x+y \quad x-z) = (-9 \quad 4 \quad -10)$, trouver les valeurs de x, y et z.

11 **Réflexion critique** Si $\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a+b+c & a-b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, trouver les valeurs de a, b, c et d.

A apprendre

Multiplication d'un nombre réel par une matrice

Multiplication d'un nombre réel par une matrice veut dire la multiplication de chaque élément de la matrice par ce nombre réel.

C'est-à-dire le produit de la matrice A de dimension $m \times n$ par un nombre réel k est une matrice $C = kA$ de même dimension $m \times n$ et chaque élément de C égale l'élément correspondant dans la matrice A multiplié par le nombre réel k ,

c'est-à-dire $c_{ij} = ka_{ij}$ où $i = 1; 2; \ldots; m$; $j = 1; 2; \ldots; n$

Remarque que :

$$k \begin{pmatrix} x & y \\ z & \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx & ky \\ kz & k\ell \end{pmatrix}$$

Exemple : $-2 \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 4 & -2 \times 1 \\ -2 \times 5 & -2 \times -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$

Exemple

6 Une cafétéria a augmenté le prix de chaque boisson une fois et demie de son prix. Utilise les prix dans le tableau suivant pour trouver le prix de chaque boisson après l'augmentation.

	Petit	Grand
Verre de lait	0;75 L.E.	1;50 L.E.
Verre d'orange	0;85 L.E.	1;75 L.E.
Verre de mangue	0;90 L.E.	1;90 L.E.

Solution

$$1{;}5\begin{pmatrix} 0{;}75 & 1{;}50 \\ 0{;}85 & 1{;}75 \\ 0{;}90 & 1{;}90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{;}5\times 0{;}75 & 1{;}5\times 1{;}50 \\ 1{;}5\times 0{;}85 & 1{;}5\times 1{;}75 \\ 1{;}5\times 0{;}90 & 1{;}5\times 1{;}90 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{;}125 & 2{;}25 \\ 1{;}275 & 2{;}625 \\ 1{;}35 & 2{;}85 \end{pmatrix}$$

Le prix du petit verre du lait sera 1;125 L.E, le prix du grand verre du lait sera 2;25 L.E, le prix du petite verre d'orange sera 1;275 L.E, le prix du grand verre d'orange sera 2;625 L.E., le prix du petite verre du mangue sera 1;35 L.E. et le prix du grand verre de la mangue sera 2;85 L.E.

Essaie de résoudre

(12) Si $A = \begin{pmatrix} 15 & -12 & 10 \\ 20 & -10 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, trouver $-5A$

A apprendre

Transposée d'une matrice

Pour toute matrice A de dimension $m \times n$, si on échange les lignes par les colonnes ou les colonnes par les lignes en conservant l'ordre, on obtient une matrice de dimension $n \times m$. Elle est appelée matrice transposée de la matrice A. Elle est notée ${}^tA$.

A partir de la définition, on obtient immédiatement le résultat suivant ${}^t({}^tA) = A$

Exemple

(7) Ecrire la transposée de chacune des matrices suivantes :

A $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ **B** $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ **C** $C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Solution

A ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **matrice de dimension 3×2**

B ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ **matrice de dimension 3×1**

C ${}^tC = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ **matrice de dimension 2×2**

Matrices symétriques et matrice antisymétriques :

Si A est une matrice carrée. On dit que A est une matrice symétrique si et seulement si $A = {}^tA$.
On dit que A est une matrice antisymétrique si et seulement si $A = -{}^tA$.

Exemple

8 La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est - elle symétrique ou antisymétrique ?

Solution

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ ${}^tB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

${}^tB = -1 \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = -B$

$\therefore {}^tB = -B$, $B = -{}^tB$ Alors la matrice B est antisymétrique

Essaie de résoudre

13 La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est -elle symétrique ou antisymétrique ?

Vérifie ta compréhension

1 Trouver la valeur de x , y et z si :

A $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} x & 3 & 0 \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & z & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2 Vérifier laquelle des matrices suivantes est symétrique et laquelle est antisymétrique

A $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & -1 \\ \frac{5}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

1 - 2 Addition et Soustraction des matrices

Apprendre

- L'addition des matrices.
- La soustraction des matrices

Expression de base

- L'addition des matrices.
- La soustraction des matrices

Matériel et moyens

- Calculatrice électronique

Travail coopératif

Le lien à la statistique : Travail avec un collègue en utilisant les informations de tableau suivant :

Année	La moyenne arithmétique des notes			
	Sciences		Mathématiques	
	Homme	Femme	Homme	Femme
2011	428	420	502	457
2012	425	421	501	460
2013	429	426	503	463

1- **A** Trouver la somme des notes des deux moyennes arithmétiques des hommes de chaque année dans le tableau.

B Trouver la somme des notes des deux moyennes arithmétiques des femmes de chaque année dans le tableau

2- **A** Ecrire une matrice qui représente la moyenne arithmétique des notes de la matière des sciences pour les hommes et les femmes. Donner un titre pour la matrice, pour ses colonnes et pour ses lignes.

B Quelle est la dimension de la matrice ?

3- **A** Ecrire une matrice qui représente la moyenne arithmétique des notes des mathématiques pour les hommes et les femmes. Donne un titre pour la matrice, pour ses colonnes et pour ses lignes.

B Quelle est la dimension de la matrice?

4- D'après ta réponse des questions précédentes, écrire une troisième matrice qui représente la somme des notes des deux moyennes arithmétiques pour les hommes et les femmes. Donner un titre pour la matrice, pour ses colonnes et pour ses lignes. Quelle est la dimension de la matrice?

5- Observer et écrire une méthode pour l'addition des matrices.

A apprendre

L'addition des matrices :

On utilise parfois l'addition et la soustraction des matrices pour avoir des nouvelles informations. Pour obtenir la matrice de la somme on additionne les éléments correspondants. C'est-à-dire si A, B sont deux matrices de dimension m x n, alors A + B est une matrice aussi de dimension m × n et chaque élément est égal à la somme des deux éléments correspondants dans A et B.

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, trouver $A + B$.

Solution

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad \text{(substitution de A, B)}$$

$$= \begin{pmatrix} 0+7 & 2+(-2) \\ -1+1 & 3+(-4) \end{pmatrix} \qquad \text{(addition des éléments correspondants)}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(simplifier)}$$

Essaie de résoudre

1) Si $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$, trouver ce qui suit, si cela est possible

- $A + B$
- $A + C$

A apprendre

Propriétés de l'addition des matrices

Soient A, B et C trois matrices chacun de dimension $m \times n$ et $\square$ une matrice nulle de même dimension, alors :

1- Stabilité : $A + B$ est une matrice de dimension $m \times n$

Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×2; $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×2;

alors $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×2

2- Commutativité : $A + B = B + A$

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, **montrer que** $A + B = B + A$

3- Associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, **montrer que** $(A + B) + C = A + (B + C)$

4- Existence d'un élément neutre : $A + \square = \square + A = A$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -5 & 4 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$

5- Existence de l'opposée : $A + (-A) = (-A) + A = \square$

Sachant que $(-A)$ est l'opposée de la matrice A

Exemple : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tel que $\begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

A apprendre

Soustraction des matrices

A et B étant deux matrices de dimension m x n, alors la matrice C = A – B = A + (-B) telle que C est une matrice de dimension m x n, (-B) est l'opposée de la matrice B.

Exemple : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & \ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & -y \\ -z & -\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-\ell \end{pmatrix}$

Exemple

2 Si A = $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & -7 & -3 \end{pmatrix}$, prouve que A - B ≠ B - A.

Solution

$$A - B = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & -7 & -3 \end{pmatrix},$$
$$= \begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -9 & -2 \\ -8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -13 & 9 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & -7 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -4 & 11 \\ 6 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & -7 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 4 & -11 \\ -6 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 13 & -9 \\ 2 & -12 & -2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

De (1) et (2), on remarque que A - B ≠ B - A (la soustraction des matrices n'est pas commutative)

Réfléchis : Est-ce que la soustraction des matrices est associative ?

Exemple

3 Si A = $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et C = $\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, trouver la matrice

2A - 3 B + 5C

Solution

$$2A = 2\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times2 & 2\times5 & 2\times-1 \\ 2\times3 & 2\times-4 & 2\times6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 6 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

$$3B = 3\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 9 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times-1 & 3\times4 & 3\times3 \\ 3\times9 & 3\times-2 & 3\times5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 & 9 \\ 27 & -6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$-3B = \begin{pmatrix} 3 & -12 & -9 \\ -27 & 6 & -15 \end{pmatrix}$$

$$5C = 5\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\times6 & 5\times-1 & 5\times-2 \\ 5\times-3 & 5\times5 & 5\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & -5 & -10 \\ -15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ 2A - 3B + 5C = \begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 6 & -8 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -12 & -9 \\ -27 & 6 & -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & -5 & -10 \\ -15 & 25 & 20 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4+3+30 & 10-12-5 & -2-9-10 \\ 6-27-15 & -8+6+25 & 12-15+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -7 & -21 \\ -36 & 23 & 17 \end{pmatrix}$$

Essaie de résoudre

2 Si A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ et C = $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, trouver la matrice 2A - 3B + 4C

Test ta compréhension

1 Trouver la valeur de ce qui suit :

A $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A Trouve $A - B$, $B - A$. Que remarques-tu ? **B** Vérifie que $-(A + B) = (-A) + (-B)$

1 - 3 Multiplication des matrices

Apprendre

- Multiplication des matrices
- Propriétés de la multiplication des matrices
- La transposée de la multiplication des deux matrices

Expression de base

- Multiplication des matrices
- Transposé des matrices

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Travail coopératif

Travaille avec un collègue, utilise les informations dans le tableau ci-contre :

	Repas (1)	Repas (2)	Repas (3)
Le prix du repas en LE	3.50	2.75	2
N° des repas vendus	50	100	75

1- Quel est le prix des repas (1)? des repas (2)? des repas (3)?

2- **A** Quelle est la somme des prix des trois repas vendus ?

B Explique comment tu as utilisé les informations du tableau pour trouver la réponse .

3- **A** Ecrire la matrice 1×3 pour représenter le prix de chaque repas vendu.

B Ecrire la matrice 3×1 pour représenter le nombre des repas vendus.

C L'écriture: utilise les mots ligne, colonne, élément pour la description des étapes de l'utilisation des matrices obtenues pour trouver le prix des trois repas vendus.

Pour faire la multiplication des deux matrices, il faut multiplier les éléments des lignes de la première matrice par les éléments des colonnes de la deuxième matrice, puis on additionne les résultats.

Exemple : Pour trouver la multiplication des deux matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On multiplie $a_{11} \times b_{11} + a_{12} \times b_{21}$ puis on additionne le produit

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad (0) \times 5 + 2 \times (-1) = -2$$

Le résultat représente l'élément de la première ligne et de la première colonne. Répéter les mêmes étapes avec les autres lignes et les colonnes.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & ? \\ \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad (0)(0) + (2)(1) = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ ? & \square \\ \square & \square \end{pmatrix} \qquad (-2)(5) + (-3)(-1) = -7$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \boxed{-2 \quad -3} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & \boxed{0} \\ -1 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & ? \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

$(-2)(0) + (-3)(1) = -3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ \boxed{1 \quad 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & \boxed{0} \\ -1 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & -3 \\ 1 & \square \end{pmatrix}$$

$(1)(0)+(4)(1)=4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ \boxed{1 \quad 4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 \\ \boxed{-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & -3 \\ ? & \square \end{pmatrix}$$

$(1)(5) + (4)(-1) = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -7 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4- Décrire un modèle pour les lignes et les colonnes colorées.

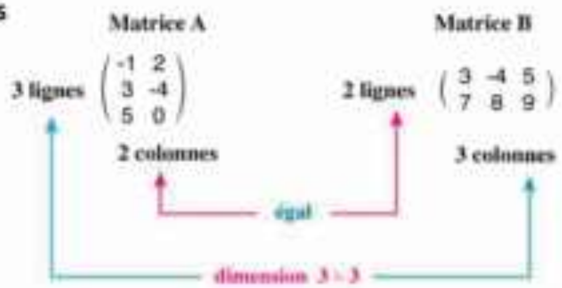
5- **A** Quelle est la dimension des matrices principales dans l'exemple précédent et la dimension de la matrice résultante ?

B **Réflexion Critique:** Comment tu peux comparer entre la dimension de la matrice de multiplication et les dimensions des matrices originales?

A apprendre

Multiplication des matrices

On peut multiplier deux matrices si et seulement si le nombre de colonnes de la première matrice est égale au nombre de lignes de la deuxième matrice. En multipliant la matrice A de dimension $m \times n$ par la matrice B de dimension $n \times l$, le résultat est une matrice AB de dimension $m \times l$.



Exemple

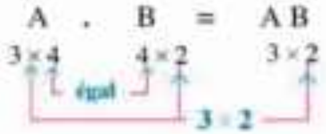
1 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la matrice de multiplication AB est définie:

A Si la dimension de A est 3 x 4 et la dimension de B est 4×2

B Si la dimension de A est 5 x 3 et la dimension de B est 5×2

Solution

A Puisque le nombre de colonnes de la matrice A est égale au nombre de lignes de la matrice B, alors la matrice de la multiplication AB est définie et . Sa dimension est 3×2



B Puisque le nombre de colonnes de la matrice A n'égale pas le nombre de lignes de la matrice B, alors la matrice de la multiplication AB n'est pas définie

Essaie de résoudre

1 Dans chacun des cas suivants, déterminer si la matrice de multiplication AB est définie ou non et expliquer la cause.

A Si la dimension de la matrice A est 3×2 et la dimension de la matrice B est 2×3.

B Si la dimension de la matrice A est 1×3 et la dimension de la matrice B est 1×3.

De la définition de la multiplication des matrices, on remarque que AB peut-être définie, mais BA n'est pas définie. En général si AB et BA sont définie, il n'est pas nécessaire que AB = BA même si elles ont les mêmes dimensions.

Exemple

2 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, trouver AB et BA. Que remarques-tu ?

Solution

$\because$ A de dimension 3×3 et B de dimension 3×3, alors AB est définie et la dimension de la matrice de la multiplication est 3×3.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times2+(-1)\times3+2\times5 & 1\times1+(-1)\times4+2\times0 & 1\times0+(-1)\times1+2\times(-1) \\ -1\times2+0\times3+3\times5 & -1\times1+0\times4+1\times0 & -1\times0+0\times1+3\times(-1) \\ 0\times2+1\times3+4\times5 & 0\times1+1\times4+4\times0 & 0\times0+1\times1+4\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -3 \\ 13 & -1 & -3 \\ 23 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$\because$ B de dimension 3×3 et A de dimension 3×3, alors BA est définie et la dimension de la matrice de la multiplication est 3×3

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\times1+1\times-1+0\times0 & 2\times-1+1\times0+0\times1 & 2\times2+1\times3+0\times4 \\ 3\times1+4\times-1+1\times0 & 3\times-1+4\times0+0\times1 & 3\times2+4\times3+1\times4 \\ 5\times1+0\times-1+(-1)\times0 & 5\times-1+0\times0+0\times1 & 5\times2+0\times3+-1\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -1 & -3 & 22 \\ 5 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

On remarque que $AB \neq BA$.

Il est possible d'utiliser la multiplication des matrices dans quelques situations dans la vie.

Exemple

3 **Le lien au Tourisme:** Une compagnie de tourisme possède 3 hôtels à Hurgada, le tableau ci-contre indique le nombre des différents types de chambres de chaque hôtel. Si le prix de la chambre à un lit est 250 LE par jour, le prix de la chambre à deux lits est 450 LE par jour et le prix d'une suite est 600 LE par jour.

Hôtel	Chambre à un lit	Chambre à 2 lits	Suite
Zahra	28	64	8
Louloua	35	95	20
Massa	20	80	15

A Ecris une matrice qui représente le nombre des différentes chambres des trois hôtels, puis écris une matrice des prix des chambres.

B Ecris une matrice qui représente le rendement quotidien de la compagnie en cas où toutes les chambres sont occupées.

C Quel est le rendement quotidien de la compagnie en cas où toutes les chambres sont occupées ?

Solution

A **La matrice des nombres de chambres** $A = \begin{pmatrix} 28 & 64 & 8 \\ 35 & 95 & 20 \\ 20 & 80 & 15 \end{pmatrix}$

La matrice des prix $B = \begin{pmatrix} 250 \\ 450 \\ 600 \end{pmatrix}$

On remarque que, on a écrit les deux matrices de sorte que le nombre de lignes de la matrice A égale le nombre de colonnes de la matrice B pour pouvoir faire la multiplication et obtenir ce qui est demandé dans (B) et (C).

B La matrice du rendement quotidien de la compagnie c'est la matrices A B. $\begin{pmatrix} 28 & 64 & 8 \\ 35 & 95 & 20 \\ 20 & 80 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 250 \\ 450 \\ 600 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 28 \times 250 + 64 \times 450 + 8 \times 600 \\ 35 \times 250 + 95 \times 450 + 20 \times 600 \\ 20 \times 250 + 80 \times 450 + 15 \times 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40600 \\ 63500 \\ 50000 \end{pmatrix}$$

C Le rendement quotidien de la compagnie $= 40600 + 63500 + 50000 = 154100$ L.E.

A apprendre

Propriétés de la multiplication des matrices

De la définition des opérations de l'addition et la multiplication des matrices, en supposant que les conditions nécessaires aux deux définitions sont approuvées, il est possible de déduire les propriétés suivantes :

1- Associativité : $\boxed{(A\,B)\,C = A\,(B\,C)}$:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, trouver (AB) C et A (BC). Que remarques-tu ? Est-ce que l'opération de la multiplication des matrices est associative ?

2- Existence de l'élément neutre $\boxed{A\,I = I\,A = A}$ telle que I est la matrice d'unité

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Prouver que AI = IA = A. Telle que I est la matrice d'unité.

3- Distributivité de la multiplication des matrices sur l'addition.

$$\boxed{\begin{array}{l} A(B + C) = A\,B + A\,C \\ (A + B)\,C = A\,C + B\,C \end{array}}$$

et maintenant, Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

prouver que : **A** $A(B + C) = AB + AC$ **B** $(B + C)\,A = B\,A + CA$

Transposée du produit de deux matrices :

De la définition du transposé de la matrice et la définition de la multiplication des matrices, il est possible de déduire la propriété suivante : $\boxed{{}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA}$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, prouver que: ${}^t(A\,B) = {}^tB\,{}^tA$

Test de compréhension

Déterminer si la matrice de la multiplication des matrices AB est définie dans tous les cas suivants ou non et si elle est définie, trouver la dimension de la matrice obtenue :

A La matrice A de dimension 3×1 et la matrice B de dimension 2×3

B La matrice A de dimension 3×3 et la matrice B de dimension 2×2

1 - 4 Déterminants

Apprendre

- Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2.
- Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3.
- Déterminant d'une matrice triangulaire.
- Déterminer l'aire du triangle en utilisant le déterminant.
- Résolution d'un système d'équations linéaires par la méthode de Cramer.

Expression de base

- Déterminant
- Déterminant d'ordre 2
- Déterminant d'ordre 3.
- La diagonale principale d'un déterminant
- L'autre diagonale
- Matrice de coefficients

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique
- Feuilles de graphique

Réfléchis et discute

1- Qu'est ce que la matrice carrée ?

2- Ecrire une matrice carrée de dimension 2×2 et de dimension 3×3

3- Si A est une matrice carrée de dimension 2×2 tel que:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$, alors le déterminant de la matrice A est le nombre qui est défini par:

$|A| = 2 \times 7 - 5 \times 1 = 14 - 5 = 9$

Trouver le déterminant de chacune des matrices suivantes.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

A apprendre

Déterminants

Si A est une matrice carrée de dimension 2×2 telle que

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors le déterminant de la matrice A est noté par $|A|$ et l'on appelle déterminant d'ordre 2 et il est défini par :

l'autre diagonale

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

diagonale principale

On remarque que la valeur du déterminant d'ordre 2 égale au produit des 2 éléments de la diagonale principale moins le produit des 2 éléments de l'autre diagonale.

Exemple

1. Trouver la valeur de chacun des déterminants suivants :

A $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ **B** $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$ **C** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **D** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$

Solution

A $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 4 \times 7 - 3 \times 5 = 28 - 15 = 13$

C $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1 - 0 = 1$

B $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 \times 3 - 7 \times 5 = 0 - 35 = -35$

D $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \times 7 - 2 \times 0 = 7 - 2 = 5$

Essaie de résoudre

(1) Trouver la valeur de chacun des déterminants suivants :

A $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$ **B** $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$ **C** $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$

A apprendre

Déterminant d'ordre trois

On l'appelle le déterminant d'une matrice de dimension 3 x 3 par le déterminant d'ordre 3 et pour trouver la valeur de . $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ alors :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(e\,i - f\,h) - b(\,d\,i - f\,g) + c\,(d\,h - e\,g)$$

Exemple

(2) Pour trouver la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}$, alors:

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 7\,(4 \times 6 - 2 \times 1) - 2\,(3 \times 6 - 1 \times (-1)) + 5\,(3 \times 2 - 4 \times (-1))$$

$$= 7 \times 22 - 2 \times 19 + 5 \times 10$$

$$= 154 - 38 + 50 = 166$$

A apprendre

Déterminant cofacteur qui correspond à n'importe quel élément dans la matrice

Si A est une matrice de dimension 3×3 tel que $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Alors: le déterminant cofacteur qui correspond à l'élément a_{11} et prend le symbole $|a_{11}|$ est $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

Remarque que nous avons obtenu ce déterminant en éliminant la ligne et la colonne de l'intersection sur l'élément a_{11} comme suit :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

De même :

➢ Le déterminant cofacteur qui correspond à l'élément a_{12} et noté par $|a_{12}|$ est $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

➢ Le déterminant cofacteur qui correspond à l'élément a_{13} et noté par $|a_{13}|$ est $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

➢ Le déterminant cofacteur qui correspond à l'élément a_{21} et noté par $|a_{21}|$ est $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ et ainsi

tous ces déterminants sont d'ordre 2 :

Remarques importantes :

1- Si A est une matrice carrée de dimension 3×3 sous forme :

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, et le déterminant A est noté par $|A|$ tel que :

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}|a_{11}| - a_{12}|a_{12}| + a_{13}|a_{13}|$$

2- Remarque que nous multiplions chaque élément du déterminant cofacteur par les signes +, -, +, ... respectivement, alors le signe de déterminant cofacteur correspondant à l'élément est déterminé par la règle

Le signe de $|a_{ij}|$ est $(-1)^{i+j}$

Exemple : Le signe de $|a_{12}|$ est $(-1)^{1+2}$ qui est négatif.

Le signe de $|a_{13}|$ est $(-1)^{1+3}$ qui est positif.

En général pour déterminer le signe d'un déterminant cofacteur correspondant à un élément, on additionne les rangs de la ligne et de la colonne de cet élément.

➢ Si la somme des deux rangs est **paire,** alors le signe est **positif** .

➢ Si la somme des deux rangs est **impaire,** alors le signe est **négatif.**

Et on remarque que le signe de déterminant cofacteur suit la règle $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$

3- On peut développer le déterminant en fonction des éléments de n'importe quelle ligne (ou colonne) et ses déterminants cofacteurs avec le signe convenable.

Exemple

3 Pour trouver la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ en utilisant le développement par la deuxième colonne, **on remarque que** les signes des déterminants cofacteurs correspondant à l'élément de la deuxième colonne sont –; +; – respectivement, alors le déterminant:

$= -2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

$= -2\,(-4 - 35) + 0 + 2\,(5 - 12)$

$= 78 - 14 = 64$

Idée utile pour la solution

Il est possible de développer le déterminant en utilisant n'importe quelle ligne ou colonne qui renferme la plus grand nombre de zéros pour faciliter l'obtention de sa valeur en prenant le signe convenable

Essaie de résoudre

2 Trouver la valeur de chacun des déterminants suivants :

A $\begin{vmatrix} -1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ **B** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ **C** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ **D** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

A apprendre

Déterminant de la matrice triangulaire

La matrice triangulaire est une matrice dont tous les éléments au-dessus ou au-dessous de la diagonale principale sont des zéros. Par exemple

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Et on remarque que : La valeur du déterminant de la matrice triangulaire égale au produit des éléments de la diagonale principale. C'est-à-dire :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$$

Et comme démonstration on développe le déterminant par l'élément de la première ligne :

Le déterminant $= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,(a_{22} \times a_{33} - a_{32} \times 0) = a_{11}\, a_{22}\, a_{32}$

Exemple

4 Trouver la valeur de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

Solution

On remarque que le déterminant est un déterminant d'une matrice triangulaire, alors :

Le déterminant $= 1 \times (-3) \times 6 = -18$

Essaie de résoudre

3 Trouver la valeur de chacun des déterminants suivants :

A $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ **B** $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

A apprendre

Détermination de l'aire d'un triangle en utilisant les déterminants

On peut utiliser les déterminants pour trouver l'aire du triangle en connaissant les coordonnées des sommets du triangle comme suit :

L'aire du triangle ayant pour sommets: X (a, b), Y (c, d) et Z (e, f) est |A| où:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}$$

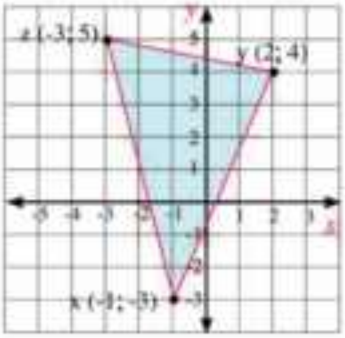
Rappelle toi

|A| signifie que la valeur de A est positive

Exemple

5 Trouver, en utilisant les déterminants, l'aire du triangle dont les coordonnées des sommets sont (-1; -3) , (2; 4) et (-3; 5)

Solution



$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-1(4-5) + 3(2+3) + 1(10+12)]$$

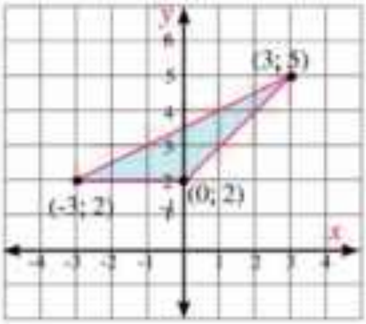
$$= \frac{1}{2}(1 + 15 + 22) = 19 \text{ unités carrée}$$

Essaie de résoudre

4 Trouver, en utilisant les déterminants, l'aire du triangle ABC dont les sommets sont A(-2; -2), B (3; 1) et C (-4; 3)

Exemple

6 Le lien à la géométrie: Si les coordonnées des trois points dans le plan de repère sont (0; 2), (3; 5), (-3; 2) et les coordonnées sont en mètres. Trouver l'aire du triangle ayant ces sommets.

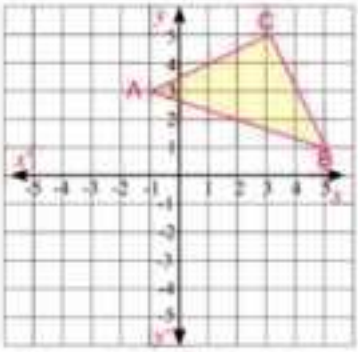


Solution

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[0\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - 0 - 3\,(2-5)\right] = 4\,\frac{1}{2}\text{m}^2$$



Essaie de résoudre

5) En utilisant les déterminants, trouver l'aire du triangle ci-contre.

A apprendre

Résolution des équations linéaires par de la méthode de Cramer

1- Résolution des équations linéaires en deux inconnues :

Si on a les équations linéaires en deux inconnues sous la forme de

$$a\,x + b\,y = m$$
$$c\,x + d\,y = n$$

Alors la matrice dont les éléments des coefficients des inconnues est appelée matrice des coefficients$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On peut utiliser les déterminants pour résoudre les systèmes des équations linéaires. Si la valeur du déterminant de la matrice des coefficients $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ qui est noté par Δ (on lit delta), n'égale pas à zéro, alors le système a une seule solution unique. Si la valeur du déterminant est zéro, alors le système a une infinité de solutions ou n'a pas de solution. On remarque que les coefficients de l'inconnue x est représenté par la première colonne du déterminant Δ et les coefficients de l'inconnue y est la deuxième colonne du déterminant Δ

Le déterminant $\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant de l'inconnu x et noté par Δx et on l'obtient en remplaçant successivement la première colonne par les constantes m et n dans le déterminant des coefficients Δ.

Le déterminant $\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}$ est appelé le déterminant de l'inconnu y et noté par Δy et que l'on obtient en remplaçant successivement la deuxième colonne par les constantes m et n dans le déterminant des coefficients Δ

On suppose que : $\Delta \neq 0$, alors la solution de système est :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{md - nb}{ad - cb} \quad , \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ b & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{an - bm}{ad\text{-}cb}$$

Exemple

7 Résoudre le système des deux équations suivantes par la méthode de Cramer.

$x - 3y = -4 \qquad 2x + y = 2$

Solution

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1 \times 1) - (2 \times -3) = 1 + 6 = 7 \neq 0$

Alors $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(-4 \times 1) - (2 \times -3)}{7} = \frac{-4 + 6}{7} = \frac{2}{7}$

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{(1 \times 2) - (-4 \times 2)}{7} = \frac{2 + 8}{7} = \frac{10}{7}$

L'ensemble solution $= \{(\frac{2}{7}, \frac{10}{7})\}$

Vérification:

- $\frac{2}{7} - 3(\frac{10}{7}) \stackrel{?}{=} -4$

  $\frac{-28}{7} \quad = -4 \qquad (\checkmark)$

- $2(\frac{2}{7}) + \frac{10}{7} \stackrel{?}{=} 2$

  $2 \quad = 2 \qquad (\checkmark)$

Essaie de résoudre

6 Résoudre le système des deux équations suivantes par la méthode de Cramer:

$x + 2y = 0 \qquad 2x - 3y = 1$

2- Résolution des équations linéaires en trois inconnues

Si on a le système des équations linéaires en trois inconnues comme suit :

$a_1 x + b_1 y + c_1 z = m \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z = n \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z = k$

et comme on a fait dans le système des deux équations, alors :

$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ = déterminant de coefficients

$\Delta x = \begin{vmatrix} m & b_1 & c_1 \\ n & b_2 & c_2 \\ k & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ = déterminant de l'inconnu x

Nous l'obtenons en changeant les éléments de la première colonne (coefficient de x) par les constants m, n, k

$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & m & c_1 \\ a_2 & n & c_2 \\ a_3 & k & c_3 \end{vmatrix}$ = déterminant de l'inconnu y

Nous l'obtenons en changeant les éléments de la deuxième colonne (coefficients de y) par les constants m, n, k

$\Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & m \\ a_2 & b_2 & n \\ a_3 & b_3 & k \end{vmatrix}$ = déterminant de l'inconnu z

Nous l'obtenons en changeant les éléments de la troisième colonne (coefficients de Z) par les constants m, n, k

Si on suppose que $\Delta \neq$ zéro, alors : $x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$

Exemple

8 Résoudre le système d'équations linéaires suivantes par la méthode de Cramer.

$-x + 3y + z = 0$ $\qquad$ $3x - 2y - z = 1$ $\qquad$ $x + y + 2z = 0$

Solution

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(-4+1) - 3(6-1) + 1(-3+2) = 3 - 15 - 1 = -13$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1(6-1) = -5 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(-1 \times 2 - 1 \times 1) = -3$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1(-1 \times 1 - 1 \times 3) = 4$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-13} = \frac{5}{13}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-3}{-13} = \frac{3}{13},$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{4}{-13}$$

L'ensemble solution $= \{(\frac{5}{13}, \frac{3}{13}, \frac{-4}{13})\}$

Vérification:

- $-(\frac{5}{13}) + 3(\frac{3}{13}) + (\frac{-4}{13}) \stackrel{?}{=} 0$
  $0 = 0$ (✓)
- $3(\frac{-5}{13}) + 2(\frac{3}{13}) - (\frac{-4}{13}) \stackrel{?}{=} 1$
  $1 = 1$ (✓)
- $1(\frac{5}{13}) + 1(\frac{3}{13}) + 2(\frac{-4}{13}) \stackrel{?}{=} 0$
  $0 = 0$ (✓)

Essaie de résoudre

7 Résoudre le système d'équations linéaires suivantes en utilisant la méthode de Cramer.

$x + y - z = 2$ $\qquad$ $x + 2y + z = 7$ $\qquad$ $3x - y + z = 10$

Test de compréhension

1 Résoudre chacun des systèmes d'équations suivantes en utilisant la méthode de Cramer.

A $2x - 3y + 5z = 7$
$3x + 4y + 2z = 11$
$x - 2y + 7z = 16$

B $2x + y - z = -1$
$2x - y + 4z = 1$
$5x - 3y + 2z = 3$

2 <u>Le lien au consommateur:</u> Fadi a acheté 3 cahiers et 2 livres à 85 LE et Karim a acheté 2 cahiers et 4 livres de même genre à 110 LE. Utiliser la méthode de Cramer pour trouver le prix d'un cahier et d'un livre.

1 - 5 Inverse de la matrice

Apprendre

- Trouver L'inverse d'une matrice de dimension 2 x 2.
- Résolution du système des 2 équations linéaires en utilisant l'inverse d'une matrice.

Expression de base

- l'inverse de la matrice
- matrice unité
- l'équation matricielle
- matrice des variables
- matrice des constantes

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Travail coopératif

Travail avec un collègue

1- Trouver le produit de :

A $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

2- Décrire les façons dans ta réponse à la question N° 1

3- Trouver le produit de :

A $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4- Décrire les façons dans ta réponse à la question N° 3

5- **Réflexion critique :** Comment lié tes réponses aux deux questions (1) et (3)

A apprendre

Inverse d'une matrice 2 × 2

Si on a deux matrices carrées A et B chacune d'elles est de dimension 2×2 . Si $AB = BA = I$ (I matrice unité),

On dit que la matrice B est appelée l'inverse de la matrice A et de même A est l'inverse de la matrice B.

Si la matrice A a un inverse, on la symbolise par A^{-1} telle que $A A^{-1} = A^{-1} A = I$

> **Rappelle - toi**
>
> *1- La matrice unité est la matrice I est une matrice carrée dont les éléments de sa diagonale principale sont 1 et les autres sont nuls*
>
> *2- Si le produit des 2 nombres réels est 1 alors on dit que les 2 nombres l'un est l'inverse de l'autre.*

Quelques matrices n'ont pas un inverse, ce qui suit t'aideras à déduire si la matrice de dimension 2×2 a un inverse ou non , et la façon de trouver cet inverse. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ainsi l'inverse de la matrice A peut être définie (existe) quand le déterminant A=

$\Delta \neq 0$ Et en supposant que la matrice A^{-1} est l'inverse de la matrice A et le déterminant de $\Delta \neq 0$ ainsi :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exemple

1 Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, prouver que la matrice A a un inverse, puis trouver cet inverse.

Solution

Déterminant $A = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times -2 - 8 \times 0 = 2$

$\therefore \Delta \neq 0$ c'est A a un inverse A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Rappelle - toi

Si $\Delta \neq 0$, ainsi la matrice A a un inverse qui est déterminé comme suit :

a) Échange dans la position des éléments situés sur la diagonale principale de la matrice A.

b) Change le signe des éléments situés sur l'autre diagonale de la matrice A

c) Multiplie la matrice résultante après avoir fait les étapes (a), (b) par le nombre $\frac{1}{\Delta}$, tu obtiendras A^{-1}

Essaie de résoudre

1 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, prouver que la matrice A admet un inverse, puis le-trouver.

2 Est-ce que la matrice $B = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, admet un inverse ? Expliquer ?.

Exemple

2 Trouver les valeurs de a de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 8 & a \end{pmatrix}$ ait un inverse.

Solution

La matrice n'a pas d'inverse quand le déterminant de la matrice égale zéro.

C'est à dire quand. $\begin{vmatrix} a & 2 \\ 8 & a \end{vmatrix} = 0$

$a^2 - 8 \times 2 = 0$

$a^2 - 16 = 0$

ainsi il existe deux valeurs à a qui sont 4, -4 (les racines de l'équation $a^2 - 16 = 0$) qui font que la matrice donnée n'a pas d'inverse.

$\therefore$ quand $a \in R - \{-4, 4\}$, la matrice donnée a un inverse.

Essaie de résoudre

3 Trouver les valeurs de x de sorte que la matrice $\begin{pmatrix} x & 9 \\ 4 & x \end{pmatrix}$ n'ait pas d'inverse.

Exemple

3 Si $X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, prouver $X^{-1} = X$

Solution

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ $\qquad \therefore X^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & -x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = X$

Essaie de résoudre

4 Si $B = \begin{pmatrix} x & -xy \\ 0 & y \end{pmatrix}$, prouver que $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 1 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ sachant que $x \neq 0$ et $y \neq 0$

Activité :

Cryptographie

On peut utiliser n'importe quelle matrice et son inverse pour cryptographies la lettre. Utiliser l'inverse de la matrice pour résoudre la cryptographie de la lettre: Nous écrivons le message "on trip" comme matrice de dimension 2×1 pour devenir les nombres qui suivent

on $\begin{pmatrix} 15 \\ 14 \end{pmatrix}$ **tr** $\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \end{pmatrix}$ **ip** $\begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$ (1)

quand on utilise la multiplication d'une matrice comme $R = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ alors la lettre devient ces matrices

$\begin{pmatrix} 118 \\ 44 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 156 \\ 58 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 86 \\ 34 \end{pmatrix}$ (2)

a	1	h	8	o	15	v	22
b	2	i	9	p	16	w	23
c	3	j	10	q	17	x	24
d	4	k	11	r	18	y	25
e	5	l	12	s	19	z	26
f	6	m	13	t	20		
g	7	n	14	u	21		

Remarque la matrice de cryptographie R^{-1} est

$\because R = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$

$R^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Et quand on multiplie la matrice R^{-1} par les matrices en (1) nous pouvons résoudre la cryptographie.

Résoudre :

1- Ecrire une lettre **"on time"** et cryptographie en utilisant l'inverse de la matrice et la matrice $R = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2- Ecrire une lettre de chez toi et cryptographie en utilisant l'inverse de la matrice et n'importe quelle matrice.

A apprendre

Résoudre deux équations simultanées en utilisant l'inverse de la matrice.

Si on a deux équations linéaires :

$a_1 x + b_1 y = k_1 \qquad a_2 x + b_2 y = k_2$

On peut les écrire sous la forme suivante :

$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

Et en supposant que :

$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$

Alors les deux équations peuvent être écrites sous forme d'une seule équation matricielle

$AX = C$	Telle que A est la matrice des coefficients, X est la matrice des inconnues, et C, c'est la matrice des constantes.

Et si le déterminant $A \neq 0$ **c'est-à-dire** $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

Alors on peut trouver la solution de l'équation $AX = C$:

$A^{-1}(AX) = A^{-1}C$ (En multipliant les deux membres de l'équation de gauche par A^{-1})

$\therefore (A^{-1}A)X = A^{-1}C$ (propriété de l'associativité)

$IX = A^{-1}C$ (Inverse de la matrice A)

$\therefore \boxed{X = A^{-1}C}$

On remarque qu'on peut trouver les inconnues x, y en fonction des constantes a_1, b_1, a_2, b_2, k_1, k_2.

Exemple

4) Résoudre le système des deux équations suivantes en utilisant la matrice.

$3x + 2y = 5 \qquad 2x + y = 3$

Solution

On écrit l'équation matricielle $AX = C$ telle que

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Le déterminant $A = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$

Alors la matrice A a un inverse et la solution est $kX = A^{-1}C$ **telle que :**

$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\therefore X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C'est-à-dire , $x = 1$, $y = 1$

L'ensemble solution $\{(1; 1)\}$

Vérification

$3(1) + 2(1) \stackrel{?}{=} 5$

$5 = 5$ (✓)

$2(1) + 1 \stackrel{?}{=} 3$

$3 = 3$ (✓)

Essaie de résoudre

5) Résoudre chacune des équations linéaires suivantes en utilisant les matrices

A $3x + 7y = 2$

$2x + 5y = 1$ (vérifie ta réponse)

B $x + 3y - 5 = 0$

$2x = 8 - 5y$ (vérifie ta réponse)

Exemple

5 **Exposition du livre:** Hoda et Mariam sont allées à l'exposition internationale des livres au Caire. Hoda a acheté 5 livres scientifiques, 4 livres historiques et a payé 120 LE. Mariam a acheté 5 livres scientifiques, 10 livres historiques et a payé 150 LE. Si le prix des livres scientifiques est le même et le prix des livres historiques est le même, utilise les matrices pour trouver le prix de chacun des livres scientifiques et historiques.

Solution

On suppose que x est le prix du livre scientifique et y est le prix du livre historique alors

$5x + 4y = 120$, $5x + 10y = 150$

Nous formons l'équation matricielle sous forme AX = C

alors : $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix}$

le déterminant $A = \triangle$ tel que $\triangle = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 20 = 30 \neq 0$

$\therefore$ la matrice A a un inverse A^{-1} telle que $A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

alors $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 120 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 5 \end{pmatrix}$

C'est-à-dire : $x = 20$ et $y = 5$

alors le prix du livre scientifique est 20 LE,

le prix du livre historique est 5 LE.

Vérification:

$5(20) + 4(5) \stackrel{?}{=} 120$

$120 = 120$ (✓)

$5(20) + 10(5) \stackrel{?}{=} 150$

$150 = 150$ (✓)

Essaie de résoudre

6 **Le lien au consommateur:** Amal a acheté 8 kg. de farine, 2 kg. de beurre pour 140 LE. Rim a acheté 4 kg. de farine, 3 kg. de beurre pour 170 LE. Utilise la matrice pour trouver le prix d'un kg. de farine et le prix d'un kg. de beurre.

Test de compréhension

1 Si $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et A B =I. trouver la matrice A.

2 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $A B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. trouver la matrice B.

3 **Réflexion critique:** En utilisant la matrice, trouver deux nombres dont leur somme est 10 et leur différence est 4.

Résumé de l'unité

- **Matrice** C'est formée d'éléments (variables ou nombres) sous forme de lignes et de colonnes. On l'écrit entre deux parenthèses et on la note par des lettres majuscules. On note les éléments de la matrice par des lettres minuscules et on écrit l'élément qui se trouve dans la ligne i et dans la colonne j par a_{ij}

- **Matrice carrée** C'est une matrice dont le nombre de ces lignes égale au nombre de ces colonnes.

- **Matrice ligne :** C'est une matrice qui possède une seule ligne et n'importe quel nombre de colonnes.

- **Matrice colonne :** C'est une matrice qui possède une seule colonne et n'importe quel nombre de lignes.

- **Matrice nulle :** C'est une matrice dont tous les éléments sont des zéros.

- **Matrice diagonale :** C'est une matrice carrée dont tous les éléments sont nuls sauf les éléments de la diagonale principale.

- **Matrice unité :** C'est une matrice diagonale dont tous les éléments de la diagonale principale égale à 1 et on la noté I.

- **Matrices égales :** Ce sont des matrices qui ont même dimensions et leurs éléments correspondants sont égaux.

- **Transposée d'une matrice :** Dans n'importe quelle matrice A de dimension $m \times n$ si on change les lignes par les colonnes ou les colonnes par les lignes dans le même ordre, on obtient une matrice de dimension $n \times m$ et on l'appelle transposée de la matrice A et on la note par ^tA, $^t(^tA) = A$.

- **Matrice symétrique :** Si A est une matrice carrée, elle est appelée symétrique et seulement si $A = {}^tA$.

Résumé de l'unité

- **Matrice antisymétrique :** La matrice A est appelée antisymétrique si et seulement si $A = -{}^tA$.
- On peut additionner et soustraire les matrices si elles ont même dimension des éléments correspondants.
- Pour multiplier une matrice par un nombre réel k, on multiplie chaque élément de cette matrice par ce nombre.
- On peut multiplier deux matrices si le nombre de colonnes de la première matrice égale au nombre de lignes de la deuxième matrice.
- Deux matrices forment l'un inverse de l'autre, si leur multiplication égale à la matrice unité.
- Pour résoudre l'équation matricielle sous la forme AX = B, on trouve l'inverse de la matrice des coefficients, puis on multiplie les deux membres de l'équation avec cette matrice.

Algèbre

Unité 2

Programmation linéaire

Objectifs de l'unité

A la fin de cette unité l'élève doit être capable de :

- Résoudre les inéquations du premier degré à une inconnue en représentant la solution graphiquement.
- Résoudre les inéquations du premier degré à deux inconnues et déterminer la région de solution graphiquement.
- Résoudre un système d'inéquations linéaire graphiquement.
- Résoudre des problèmes dans la vie sur les systèmes d'inéquations linéaires.
- Pouvoir utiliser la programmation linéaire pour résoudre des problèmes mathématiques vitaux.
- Savoir placer des connaissances concernant un sujet d'un problème vital dans un tableau convenable et de traduire ses informations sous forme d'une inéquation linéaire puis déterminer la région de la solution graphiquement.
- Savoir déterminer la fonction objective en fonction des coordonnées, en déterminant les points appartenant à l'ensemble de solution, puis donner le meilleur résultat à la fonction objective.

Expressions de base

- inéquation linéaire
- la droite frontière pointillée
- inéquation linéaire à deux inconnues
- système des inéquations linéaires
- la région de solution
- la programmation linéaire
- la droite frontière
- la droite frontière pleine
- graphique
- contraintes
- le meilleur résultat possible (optimisation)

Leçons de l'unité

Leçon (2 - 1): Inéquations linéaires.

Leçon (2 - 2): Résolution des systèmes des inéquations linéaires graphiquement.

Leçon (2 - 3): Programmation linéaire et le meilleur résultat possible (optimisation)

Matériel utilisé

Graphique. 10×10 -Feuille quadrillée.- Crayon de couleurs. - Quelques sites électroniques
www.phschool.com

Historique

Quand on résous un problème pour trouver la valeur maximum ou minimum sous certaines conditions que l'on peut mettre sous forme d'inéquations linéaires et on obtient la solution quand on utilise par la programmation linéaire. Après la seconde guerre mondiale le monde a rencontré de nombreux problèmes : crise économique, connaissances et règles ont contribué à résoudre ces problèmes. Et parmi ceux qui ont essayé de résoudre ces problèmes : Georges Dantzig il a réussi de trouver une méthode qui résous les problèmes de la programmation linéaire qui dépend sur la méthode "Simplex méthode". Nous allons aborder ici la programmation linéaire qui dépend principalement de la résolution d'inéquations de deux inconnues.

Organigramme de l'unité

2 - 1 Inéquations linéaires

Apprendre

- Résolution d'inéquation du premier degré en une inconnue et faire la représentation graphique.
- Résolution d'une inéquation du premier degré a 2 inconnues et déterminer la région de solution graphiquement

Expression de base

- Inéquation linéaire
- Ligne frontière
- Ligne frontière pointillée
- Ligne frontière solide
- Inéquation linéaire à une inconnue
- Inéquation linéaire a deux inconnues

Matériel et moyens

- Plan de repère 10×10
- Feuille quadrillée.
- Crayons de couleur.

Travail coopératif

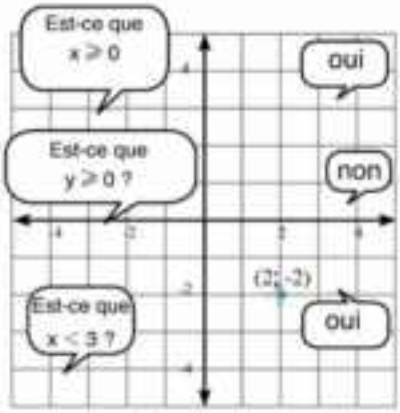
Matériels: plan de repère 10×10

1- Avec un ami, joue "Quel est le point"?

le but du jeu :

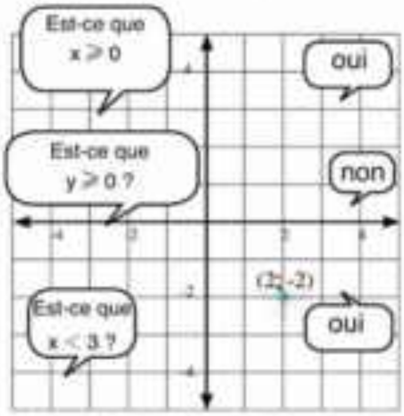
Déterminer la position d'un point sur le plan des coordonnées en posant le plus petit nombre de questions possibles.

Comment jouer ?



- Le joueur A choisit un point secret dans le plan de repère et les coordonnées du point compris entre -5 et 5
- le joueur B demande des questions au joueur A contenant les mots "plus petit que" ou "plus grand que" et le joueur A répond par "oui" ou "non" seulement.
- Le joueur A enregistre le nombre de questions posées et le joueur B nomme le point secret.
- les deux joueurs échangent leurs rôles pour compléter la première partie du jeu.

Comment gagner ?



- Le joueur qui détermine le point en posant le plus petit nombre de questions est le gagnant de la première partie et le joueur qui gagne les trois premières parties est le gagnant.

2- Combien de questions tu as besoin pour déterminer la position du point secret ?

3- Si tu as une bonne chance, quel est le nombre des questions que tu as besoin pour déterminer la position du point secret ? Explique ta réponse par des exemples.

4- Comment les inéquations t'aident à déterminer la position du point secret?

5- Propose une stratégie pour gagner ce jeu.

A apprendre

Résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue

Nous avons déjà étudié la solution de l'inéquation du premier degré à une inconnue. La solution de l'inéquation dépend à l'ensemble de substitution et dépend aux propriétés de la relation d'inégalité suivante.

Propriétés des relations d'inégalité dans R

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a:

Remarque
Si l'inéquation a une inconnue, on peut représenter l'ensemble solution sur une droite numérique comme tu as déjà étudié

➤ Si $a \geqslant b$, alors $a + c \geqslant b + c$ **pour tout** c
$ac \geqslant bc$ **pour tout** $c > 0$
$ac \leqslant bc$ **pour tout** $c < 0$

➤ Si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$ **pour tout** c
$ac \leqslant bc$ **pour tout** $c > 0$
$ac \geqslant bc$ **pour tout** $c < 0$

Exemple

1) Déterminer l'ensemble solution de chacune des deux inéquations suivantes telles que $x \in \mathbb{R}$, puis représenter-les sur une droite numérique :

A $3x - 9 > 6x$ **B** $6 + x < 3x + 2 \leqslant 14 + x$

Solution

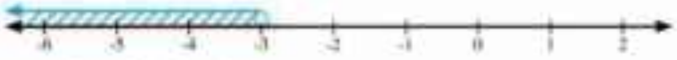
A $3x - 9 > 6x$ (en ajoutant $(9 - 6x)$ aux deux membres)

$\therefore\ 3x - 9 + 9 - 6x > 6x + 9 - 6x$

$\therefore\ -3x > 9$ (en multipliant les deux membres par $-\frac{1}{3}$)

$x < -3$

Ensemble solution $=]-\infty, -3[$



B On divise la double inéquation en deux inéquations

la première inéquation $6 + x < 3x + 2$ et la deuxième inéquation: $3x + 2 \leqslant 14 + x$

$\therefore 6 - 2 < 3x - x$ et $\therefore 3x - x \leqslant 14 - 2$

$\therefore x > 2$ et $\therefore x \leqslant 6$

L'ensemble solution $=]2; +\infty[$ et L'ensemble solution $=]-\infty; 6]$

L'ensemble solution $=]2; +\infty[\cap]-\infty; 6] =]2; 6]$

Essaie de résoudre

1) Résoudre les inéquations suivantes, dans R, et représenter l'ensemble des solutions graphiquement sur une droite numérique

A $3x + 5 \geqslant 2$ **B** $2 < x - 1 < 5$ **C** $3 + 2x < 3x + 2 \leqslant x + 7$

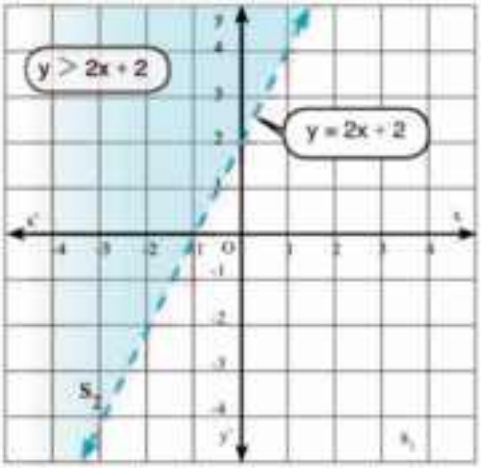
A apprendre

Résolution d'inéquations du premier degré à deux inconnues :

L'inéquation du premier degré à deux inconnues ressemble à l'équation du premier degré à deux inconnues la différence entre elles et de mettre le symbole de l'inégalité au lieu de symbole de l'égalité . Exemple : $y > 2x + 2$ est une inéquation linéaire, $y = 2x + 2$ est une équation linéaire.

La représentation graphique de l'inéquation

$y > 2x + 2$; c'est la région colorée dans la figure ci-contre



Remarque que : Chaque point dans la région colorée vérifie l'inéquation . La représentation graphique de la droite $y = 2x + 2$ est la frontière qui représente la solution, la droite est dessinée pointillée pour indiquer que l'inéquation n'est pas vraie, mais si l'inéquation renferme le symbole $\geqslant$ ou $\leqslant$ ainsi les points sur la droite frontière vérifient l'inéquation et à ce moment la droite est représentée par une droite pleine.

Exemple

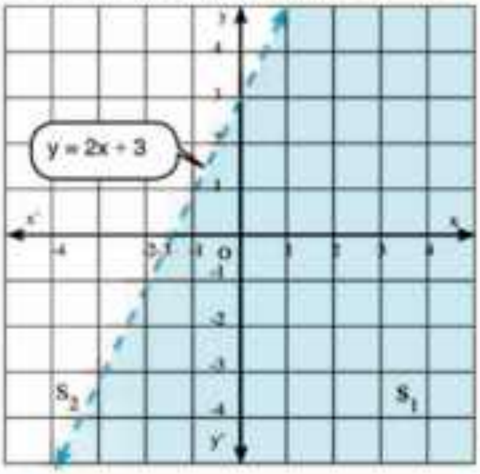
② Représenter graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation $y < 2x + 3$

Solution

Première étape: On trace la droite frontière de l'équation $y = 2x + 3$

Remarque que :
Les points de cette droite n'appartiennent pas à la solution on la dessine pointillée.

x	0	-1	-2
y	3	1	-1



Deuxième étape:
On choisit l'un des points sur l'un des côtés de la droite dessinée et on la substitue dans le membre droit, si le point vérifie l'inéquation, nous hachurons ce côté (ensemble solution), si le point ne vérifie pas l'inéquation nous hachurons l'autre côté qui sera l'ensemble solution.

Remarque

La droite frontière partage le plan en trois l'ensemble des points.

1- L'ensemble des points de la droite frontière

2- L'ensemble des points situés du plan d'un des deux côtés de la droite c'est un demi-plan, il est noté P1.

2- L'ensemble des points situés du plan de l'autre côté de la droite, c'est aussi un demi-plan, il est noté P2.

Choisis le point (0;0) qui ne se trouve pas sur la droite frontière mais se trouve sur l'un de ses côtés

$y < 2x + 3$ (l'inéquation originale)

$0 \overset{?}{<} 2(0) + 3$ (substitution par le point (0.0)

$0 < 3$ (vraie)

Hachurons la région contenant le point (0;0) où l'ensemble solution est la demi- plan où le point (0;0) appartient.

Vérification
Le graphique détermine que le point (2; 3) appartient au demi-plan de solution.

$y < 2x + 3$ (l'inéquation originale)

$3 \overset{?}{<} 2(2) + 3$ (substitution par le point (2; 3))

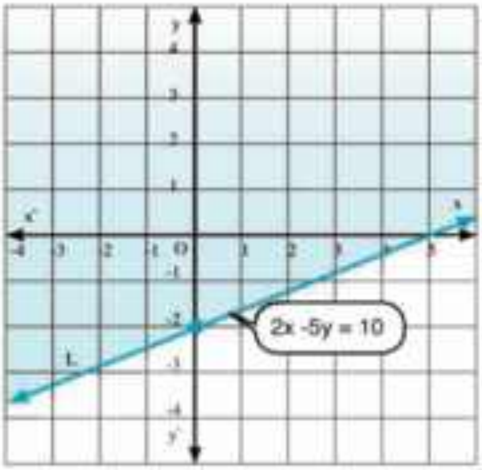
$3 < 7$ (vraie) ainsi la solution est vraie

Exemple

3 Représenter graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation : $2x - 5y \leqslant 10$

Solution

Première étape: On trace graphiquement la droite frontière (L) de l'équation.
$2x - 5y = 10$ par une droite pleine (car la relation d'inégalité est $\leqslant$)



x	0	5	$2\frac{1}{2}$
y	–2	0	–1

Il est possible de dessiner la droite frontière en mettant la droite $2x - 5y = 10$ sous la forme: $y = px + c$
telle que "p" est la pente et "c" est la partie découpée par l'axe des ordonnées.

Par exemple: $-5y = -2x + 10$ $\therefore\ y = \frac{2}{5}x - 2$

(Deuxième étape): on essaie le point d'origine (0; 0) .

$2x - 5y \leqslant 10$ (l'inéquation originale)

$2(0) - 5(0) \overset{?}{\leqslant} 10$ (substitution par le point 0; 0))

$0 \leqslant 10$ (vraie)

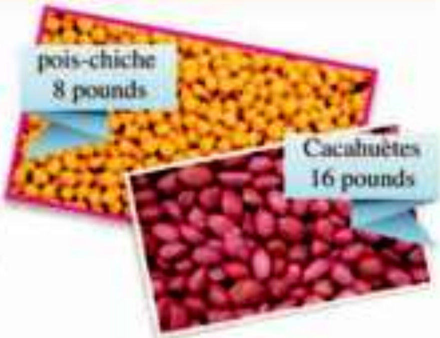
On colorie la région qui contient le point (0; 0), tel que l'ensemble de solution est le demi-plan dans lequel le point (0;0) appartenant ∪ ensemble des points de la droite frontière .

Essaie de résoudre

2 Représenter graphiquement l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

A $2x - y \geqslant 6$ **B** $y < 5x - 5$ **C** $y - 2x < 2$

Exemple



④ **Application de la vie courante :** Suppose que tu as décidé de ne pas dépenser plus que 48 LE pour acheter le pois-chiche et la cacahuète nécessaire pour ta promenade avec la famille au jardin Zoologique à Giza, quel est le nombre de kg que tu peux acheter de chaque genre ?

Solution

On suppose que x = nombre de kg de pois-chiche que tu peux les acheter
y = nombre de kg de cacahuète, que tu peux les acheter.

Le prix d'achat de pois chiche + le prix d'achat de cacahuète ⩽ le prix maximum d'achat (voir le graphique).

Ecris $8x + 16y \leqslant 48$

On dessine la droite frontière $8x + 16y = 48$ et on la représente graphiquement par une droite pleine, on utilise seulement le premier quadrant du plan orthogonal, car il n'est pas possible d'acheter une quantité négative des rosteries de la promenade.

x	0	6	2
y	3	0	2

vérifie le point $(0; 0)$

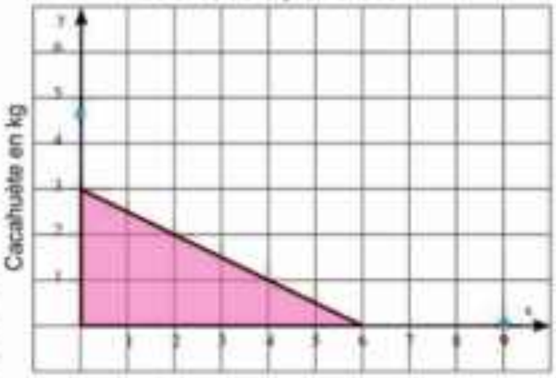
$8\,(0) + 16\,(0) \overset{?}{\leqslant} 48$

Hachure la région qui contenant le point (0,0)

$0 \quad \leqslant 48$ (vraie)

Le graphique représente toutes les solutions possibles par exemple si tu achète 2 kg de pois-chiche ,tu ne pourras pas acheter plus que 2kg de cacahuète. Est ce que 2 kg de pois chiches et, 1 kg de cacahuète est une solution de cet exemple ?

Rosteries de la promenade



Vérifie ta compréhension

① **Réflexion critique:** Si on représente l'inéquation $y \geqslant \frac{2}{5}x - 2$ graphiquement la partie hachurée est au dessus ou au dessous de la droite , $y = \frac{2}{5}x - 2$? pourquoi ?

② **lien au consommateur:** Une librairie vend deux sortes de cahiers, le premier a 6;25 LE et le second a 7;5 LE. Si Ahmed veut acheter quelques cahiers de façon qu'il ne paye pas plus que 25 LE. Combien des cahiers peut-il acheter de chaque sorte ?

Résolution graphique des systèmes d'inéquations linéaires

2 - 2

Travail coopératif

Travail avec ton collègue :

1- Représenter graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation $x \geqslant 2$ dans le plan orthogonal et colorie la région de solution par la couleur jaune.

2- Représenter graphiquement l'ensemble solution de l'inéquation $y < -1$ dans le même plan orthogonal et colorie la région de solution par la couleur verte

3- Déterminer la région où il y a les deux couleurs ensemble "le jaune et le vert".

4- Que représente la région que tu détermines dans (3).

5- Choisir trois points différents dont chacun d'eux représentent une solution des deux inéquations ensemble. Explique ta réponse

A apprendre

Système d'inéquations linéaires

Deux inéquations linéaires ou plus, forment ensemble d'un système d'inéquations linéaires. Le couple $(x_1; y_1)$ est une solution pour ce système s'il vérifie toutes les inéquations.

Essaie de résoudre

1 Tu peux décrire chaque quadrant des 4 quadrants d'un repère orthogonal en utilisant le système d'inéquations linéaires.

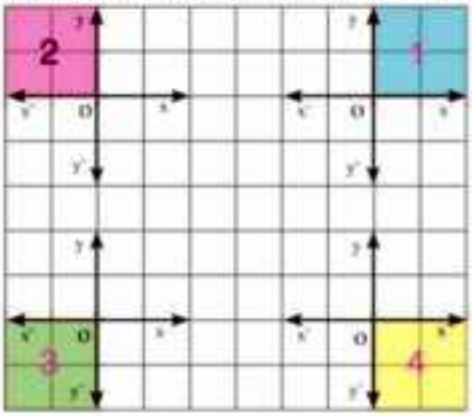
De la figure ci-dessous, déterminer le numéro du quadrant qui représente l'ensemble solution de chacun des systèmes suivants.

A $x > 0 \ , \ \ y > 0$

B $x > 0 \ , \ \ y < 0$

C $x < 0 \ , \ \ y > 0$

D $x < 0 \ , \ \ y < 0$



Apprendre

- Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires.
- Résolution des problèmes vitaux sur les systèmes des inéquations linéaires.

Expression de base

- Les systèmes d'inéquations linéaires.
- Région de solution.
- Graphique.

Matériel et moyens

- Feuille de graphique.
- Crayons de couleurs.

A apprendre

Résolution graphique d'un système d'inéquations linéaires

Résoudre un système d'inéquation linéaires, revient à trouver tous les couples ordonnés qui vérifient les inéquations de ce système. Pour déterminer tous les points (couples ordonnés) qui représentent les solutions du système, il faut colorier (hachurer) chacune des inéquations qui se trouvent dans le même plan orthogonal et la région commune sera la région de solution de ce système d'inéquations linéaires.

Exemple

1. Résoudre graphiquement le système des inéquations linéaires suivantes :
$y \geqslant 2x + 6$; $y + 3x < -1$

Solution

Première étape: Représenter l'ensemble solution de chacune des inéquations dans la feuille de graphique et colorier la région de solution. .

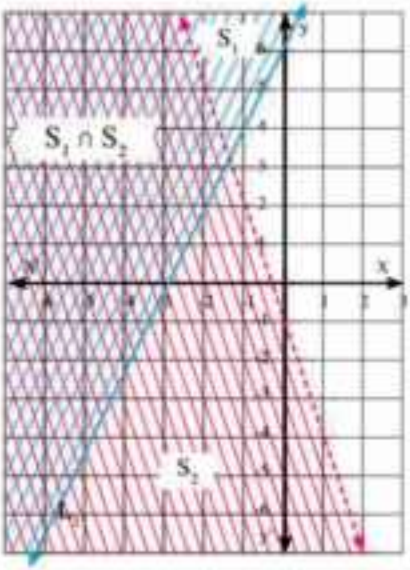
pour la **première inéquation :** $y \geqslant 2x + 6$

On dessine la droite frontière $y = 2x + 6$ (droite pleine)

x	0	-3	-2
y	6	0	2

Le point (0; 0) ne vérifie pas l'inéquation

∴ L'ensemble solution S_1 est le demi – plan qui ne contient pas le point d'origine ∪ L_1



Pour la **deuxième inéquation :** $y + 3x < -1$

On dessine la droite frontière $y + 3x = -1$ (droite pointillée)

x	0	-1	-2
y	-1	2	5

∴ Le point (0; 0) ne vérifie pas l'inéquation et la région de solution est S_2

∴ L'ensemble solution est S_2 est le demi–plan qui ne contient pas le point d'origine.

Deuxième étape: On détermine la région commune entre les deux régions et qui représente la région de solution. Alors l'ensemble solution des deux inéquations est $S_1 \cap S_2$

Vérification : On remarque que le point (–4 ; 2) appartient à la région de solution pour cela on le choisi comme point d'essai et on vérifie en substituant (x; y) par le point (-4; 2) dans les deux inéquations :

$y \geqslant 2x + 6$	$y + 3x < -1$
$2 \overset{?}{\geqslant} 2(-4) + 6$	$2 + 3(-4) \overset{?}{<} -1$
$2 \geqslant -2$ (vraie)	$-10 < -1$ (vraie)

Essaie de résoudre

2 Résoudre graphiquement le système suivant : $3x + 5y \geqslant 15$; $y < x - 1$

Exemple

2 Résoudre graphiquement les inéquations linéaires suivantes : $4y \geqslant 6x$
$-3x + 2y \leqslant -6$

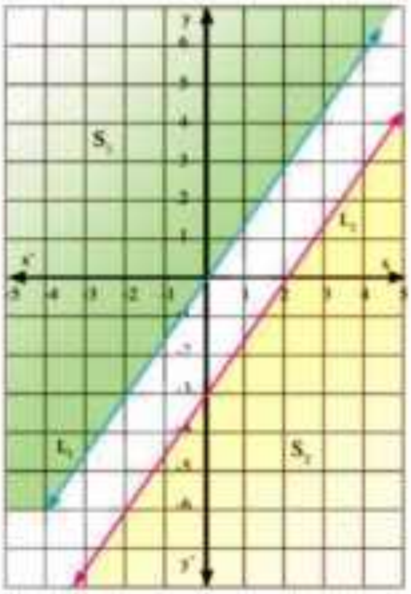
Solution

L'étape (1) : Représenter graphiquement l'ensemble solution de chaque inéquation du système et hachuré (colorie) la région de solution.

pour la première inéquation : $4y \geqslant 6x$

On dessine la droite frontière $4y = 6x$ (droite pleine)

x	0	2	-2
y	0	3	-3



Le point (0; 0) appartient à la droite frontière pour cela on choisi un autre point, soit (-3; 2)

Alors : $4(2) \geqslant 6(-3)$

c'est à dire . $8 \geqslant -12$ (vraie)

Alors l'ensemble de solution est S_1 qui est le demi-plan contenant le point $(-3; 2) \cup L_1$

Pour la deuxième **inéquation** $-3x + 2y \leqslant -6$

On dessine la droite frontière $-3x - 2y = -6$

x	0	2	-2
y	-3	0	6

Le point (0; 0) ne vérifie pas l'inéquation

$\therefore$ L'ensemble solution est S_2 qui est le demi- plan qui ne contient pas le point $(0;0) \cup L2$

étape (2): On détermine la région commune entre les deux solutions. On remarque que les deux droites L_1 et L_2 sont parallèles et il n'existe pas de partie commune entre les deux droites.

$\therefore$ L'ensemble solution des deux inéquations $= \phi$

Essaie de résoudre

3 Trouver graphiquement l'ensemble solution des inéquations linéaires suivantes : $y \leqslant x$
$y \geqslant x + 1$

Exemple

③ **Le lien à la vie** Un fermier veut construire une ferme rectangulaire de sorte que la longueur de la ferme ne soit pas moins que 80 mètres et le périmètre ne soit pas plus que 310 mètres. Quelles sont les dimensions possibles de cette ferme?

Solution

Supposons que : x = la largeur de la ferme et y = la longueur de la ferme .

Donc : La longueur ne soit pas moins que 80 mètres et le périmètre ne soit pas plus que 310 mètres

$y \geqslant 80$ $\qquad$ $2x + 2y \leqslant 310$

Pour résoudre le système d'inéquations linéaires $y \geqslant 80$
$2x + 2y \leqslant 310$

On peut suivre les démarches suivantes :

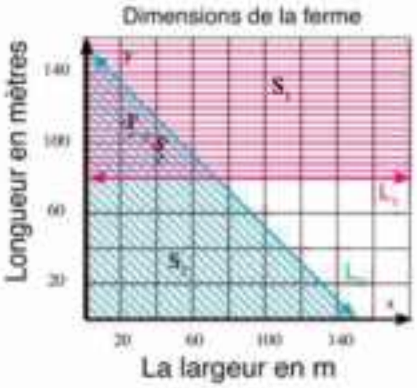
Pour la première inéquation:

$y \geqslant 80$

Utiliser la pente et la partie interceptée de l'axe des y pour tracer la droite frontière $y = 80$

(La droite frontière pleine)

x	0	1	2
y	80	80	80



La deuxième inéquation

$2x + 2y \leqslant 310$

utiliser les parties interceptées des deux axes pour dessiner la droite frontière :

$2x + 2y = 310$

La droite frontière est pleine

x	0	155	10
y	155	0	145

Cherche si le point (20; 20) vérifie l'inéquation $y \geqslant 80$

$20 \overset{?}{\geqslant} 80$ (faux)

L'ensemble solution S_1 est le demi-plan qui ne contient pas le point (20; 20) $\cup L_1$

Cherche si le point vérifie l'inéquation (20; 20)

$2x + 2y \leqslant 310$

$2(20) + 2(20) \overset{?}{\leqslant} 310$

$80 \leqslant 310$ (vraie)

L'ensemble solution S_2 est le demi-plan qui contient le point (20; 20) $\cup L_2$

L'ensemble solution $S = S_1 \cap S_2$ c'est l'ensemble des points dans la région commune représentée sur le dessin.

Essaie de résoudre

À partir de l'exemple précède :

④ Donner trois dimensions possibles (longueur et largeur) pour la ferme. Combien de solutions de ce système ?

⑤ Pourquoi l'ensemble solution est dans le premier quadrant seulement du plan orthogonal?

Exemple

④ **Problème de la vie courante.** Islam et Fadi sont allés pour visiter les monuments Pharaonique au Sud de l'Egypte. Ils ont conduit la voiture chacun à son tour de façon que Islam conduit la voiture au moins 3 heures et plus 7 heures par jour, ainsi que Fadi conduit la voiture au moins 2 heures et au plus que 6 heures par jour, de sorte que la somme d'heures de conduite pour les deux ne dépasse pas 8 heures. Ecrire un système d'inéquations linéaires qui vérifie ces informations et représente graphiquement la région de solution de ce système

Solution

Islam: Le nombre d'heures de la conduite dé Eslam au moins 3 heures et au plus 7 heures.

Supposons que x est le nombre d'heures de la conduite d'Islam
Alors $3 \leqslant x \leqslant 7$

Fadi: le nombre d'heures de la conduite de Fadi au moins 2 heures et au plus 6 heures.

Supposons que y est le nombre d'heures de la conduite de Fadi Alors $2 \leqslant y \leqslant 6$

Nombre d'heures de conduction de Islam

Et les deux ensembles pas plus que 8 heures
Alors $x + y \leqslant 8$
Représente graphiquement l'ensemble solution de chacune des trois inéquations, N'importe quel couple ordonné qui se trouve dans la région de solution du système, est une solution du système.
Parmi les solutions possibles:

3 h pour Fadi et	5 h pour Islam	; 2 h pour Fadi et	6 h pour Islam
5 h pour Fadi et	3 h pour Islam	; 3 h pour Fadi et	4 h pour Islam

Vérifie ta compréhension

Lien aux métiers: Un menuisier veut acheter deux genres des clous et il ne veut pas payer plus que 48 LE. Si le menuisier a besoin de 3 kg au moins du premier genre et un kg au moins du deuxième genre, quel est la somme que le menuisier paye pour chaque genre? Sachant que le prix d'un kg du premier genre est 6 LE, et le prix d'un kg du deuxième genre est 8 LE.

A Ecrire un système des inéquations linéaires qui décrit ce cas.

B Représenter graphiquement ce système pour trouver les solutions possibles.

C Nommer un point qui est une solution à ce système.

D Nommer un point qui n'est pas de solution à ce système.

2 - 3 Programmation linéaire et Optimisation

Apprendre

- Trouver une valeur maximale et une valeur minimale à une fonction parmi une région déterminée.
- Pour trouver la valeur maximale ou la valeur minimale d'une fonction.
- Utiliser la programmation linéaire pour trouver les solutions de quelques problèmes.
- Traduire des informations spéciales concernant un problème mathématique vital dans un tableau convenable en traduisant les informations sous forme d'inéquations linéaires et déterminer la région de solution graphiquement en déterminant la fonction objective et son optimisation.

Expression de base

- Programmation linéaire
- Contraintes
- Borné
- Non borné
- Optimisation

Matériel et moyens

- Feuille de graphique
- Crayon des couleurs

Travail coopératif

Suppose qu'on vous a proposé un travaille vacation et ta cherche à choisir la durée convenable tu penses quel est le meilleur temps à choisir pour ce travail . Tu peux utiliser les mathématiques pour t'aider à bien prendre la décision.

1- **A** Ecris une liste de tes activités pendant la semaine (un emploi du temps des activités).

B Organise ta liste de façon qu'elle ne dépasse pas 10.

2- Fais une auto-évaluation des la semaine précédente.

A Déterminer la durée des activités citées en (1)

B Quel est le temps convenable pour travail de vacation?

C Discuter : Qu'est ce que tu peux supprimer ou tu peux ajouter dans ton emploi du temps.

A apprendre

Programmation linéaire

Tu peux répondre à des questions comme celles exposées au dessus en utilisant une opération nommée la programmation linéaire.

Pour résoudre les problèmes de la programmation linéaire la première chose à faire, c'est écrie le programme linéaire du problème qui est formé de :

1- Fonction objective (pour calculer les valeurs maximales ou minimales) est une fonction linéaire sous forme de :
$R = ax + by$ telle que a et b sont deux nombres réels qui ne sont pas nuls.

2- Les contraintes qui dépendent de la nature du problème et (qui est sous forme d'inéquations linéaires à deux inconnues représentant les limites maximales et minimales des facteurs qui contrôlent les variables des problèmes.

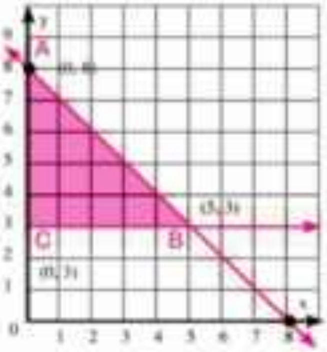
3- Les contraintes en lien à la réalité scientifique du problème sur les variations qui ne prennent pas des valeurs négatives.

Exemple

(1) En utilisant la programmation linéaire, trouver les valeurs de x; y qui rend la valeur de la fonction $R = 3x + 2y$ une valeur maximale, puis une valeur minimale sous les contraintes suivantes

$x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $x + y \leqslant 8$; $y \geqslant 3$

Solution



L'étape (1): On dessine les contraintes (représenter les inéquations graphiquement).

L'étape (2): On détermine les coordonnées des points de la région de la solution. De la figure ci-contre, on remarque que les sommets de la région de solution sont A (0; 8), B (5; 3), et C (0; 3).

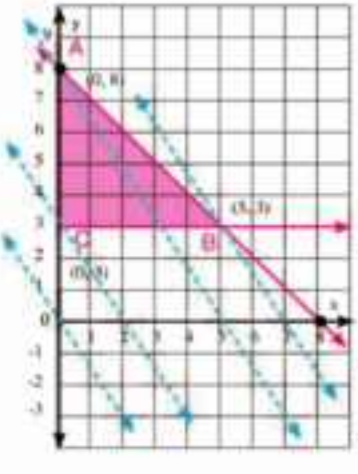
(3): Trouver la valeur de la fonction $R = 3x + 2y$ pour chaque sommet

On forme le tableau suivant

Le point	x	y	3x + 2y	Valeur de R	
A (0; 8)	0	8	3 (0) + 2 (8)	16	
B (5; 3)	5	3	3 (5) + 2 (3)	21	⟶ **Valeur maximale**
C (0; 3)	0	3	3 (0) + 2 (3)	6	⟶ **Valeur minimale**

La valeur maximale de la fonction est 21 au point (5; 3) et la valeur minimale de la fonction est 6 au point (0; 3).

Réfléchis : Pourquoi la valeur maximale ou minimale de la fonction objective est l'une des sommets de la région de la solution ?



Pour savoir la réponse de cette question :

1- Mette R = 0 dans la fonction objectif $R = 3x + 2y$. On trouve que $3x + 2y = 0$ représente une droite passant par le point d'origine et le point (2; −3).

2- En traçant quelques droites parallèles à la droite passant par le point d'origine, alors :
la première droite passe par le point C (0; 3) et l'équation sera $3x + 2y = 6$; $R = 6$.

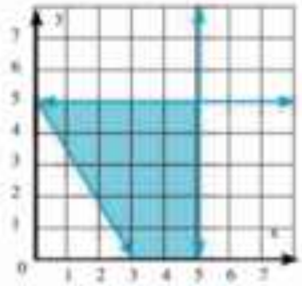
3- La valeur de R de tous les points de la deuxième droite qui passe par le point A (0; 8) est égale à 16 et R continue à augmenter jusqu'à la dernière droite qui passe par le point B (5; 3) et $R = 3 \times 5 + 2 \times 3 = 21$. Alors la valeur minimale de la fonction objectif = 6 au point (0; 3) qui est l'une des sommets de la région de solution et aussi la valeur maximale de la fonction objectif = 21 au point (5; 3), qui est l'un des sommets de la région de la solution aussi.

De ce qui précède nous pouvons déduire que : La valeur maximale et la valeur minimale si elles existent à la fonction objective, elles seront approuvées aux sommets du polygone qui entoure la région des solutions possibles des inéquations qui représentent l'ensemble des contraintes du problème ou aux points d'intersections des droites qui limitent la région des solutions possibles.

Essaie de résoudre

1. En utilisant la programmation linéaire, trouver la valeur minimale et la valeur maximale de la fonction $R = x + y$ sous les contraintes : $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $y \geqslant 2x - 2$; $y \leqslant -x + 8$

2. **De la figure ci-contre :** trouver les valeurs de x ; y qui rend la valeur de la fonction $R = 2x + 5y$ a une valeur minimale



A apprendre

Applications vitales de la programmation linéaire

La programmation linéaire est une méthode mathématique qui nous permet d'atteindre la meilleur décision pour résoudre un problème, vital ou atteindre la meilleure solution pour approuver un but détermine tel que approuver le moindre coût ou le plus grand gain dans un projet en respectant les conditions et les contraintes concernant la production, le marché ou le problème étudié, ceci peut - être approuvé en:

1- Analyser la situation ou le problème pour déterminer les variables, définir les contraintes et les mettre sous forme de système d'inéquations linéaires.

2- Ecrire la fonction objective que nous voulons atteindre du problème à étudier (c'est une fonction linéaire).

3- Représenter le système d'inéquations linéaires graphiquement.

4- Déterminer les sommets de la région de solution.

5- Remplacer les coordonnées des sommets dans la fonction objective. Vérifier la valeur maximale ou la valeur minimale selon ce qui est demandé dans le problème.

Exemple

2. **Administration :** Un des magasins vend deux genres de poissons A et B , le propriétaire n'accepte pas la demande moins que 50 poissons et le propriétaire n'utilise pas plus que 30 poissons du genre A et 35 poissons du genre B. Si le prix d'achat du poisson du genre A est 4 LE et 3 LE pour le genre B. combien de poisson de A et B faut-il utiliser pour réaliser le moindre prix d'achat possible?

Solution

1- Suppose que le nombre de poisson A est x et celui de B est y

Alors $x \geqslant 0$ (il a achètera des poissons du genre A)

$y \geqslant 0$ (il achètera des poissons du genre B)

$x + y \geqslant 50$ (il aura besoin de 50 poissons au moins)

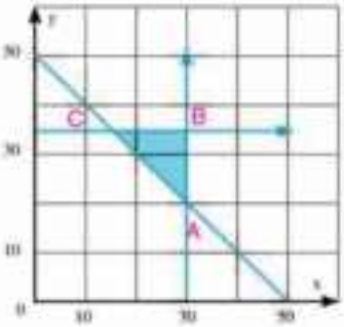
$x \leqslant 30$ (il ne pourra pas utiliser plus que 30 poissons du genre A)

$y \leqslant 35$ (il ne pourra pas utiliser plus que 35 poissons du genre B)

	1er genre	2ème genre	Minimum
	x	y	50
Prix d'achat	4	3	$4x + 3y$

2- Nous écrirons la fonction objective qui est le moindre le prix d'achat possible $R = 4x + 3y$

3- Représenter le système des inéquations graphiquement comme dans la figure ci-contre.



4- Déterminer les sommets de la région de solution : A (30; 20) , B (30; 35) et C (15; 35).

5- Remplacer les coordonnées des sommets dans la fonction objective comme dans le tableau suivant :

Le point	x	y	4x + 3y	La valeur de la fonction R
A(30; 20)	30	20	4 (30) + 3 (20)	180
B (30; 35)	30	35	4 (30) + 3 (35)	225
C (15; 35)	15	35	4 (15) + 3 (35)	165

→ Valeur minimale du prix d'achat

Le propriétaire doit acheter 15 poissons de A et 35 poissons de B pour que le prix d'achat soit le moins possible.

Essaie de résoudre

3 Le lien à l'industrie: Une petite usine de meubles en métal produit au plus 20 armoires par semaine de deux genres différents A et B. Si son bénéfice du genre (A) est 80 LE et son bénéfice du genre (B) est 100 LE. Il vendait du premier genre pas moins que trois fois ce qu'il vendait du deuxième genre. Quel est le nombre d'armoires de chaque genre pour réaliser le plus grand bénéfice possible ?

Exemple

3 Lien à la santé Une usine d'aliment des enfants fabrique deux sortes d'aliments. Le premier aliment contient 2 unités de vitamine A et 3 unités de vitamine B. Un deuxième aliment contient 3 unités de vitamine A et 2 unités de vitamine B. Si l'enfant a besoin au moins 120 unités de vitamine A et au moins 100 unités de vitamine B et si la dépense de A est 5 LE et de B 4 LE. Quelle quantité faut-il acheter de chacun des deux aliments pour réaliser cette demande au moindre coût ?

Solution

1- 1) Suppose que le nombre de A est x et le nombre de B est y

$x \geqslant 0 \quad , \quad y \geqslant 0$

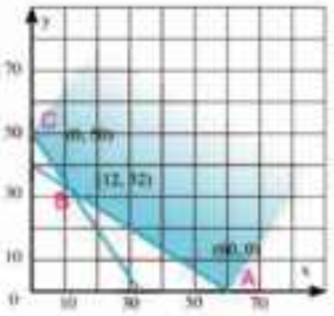
$2x + 3y \geqslant 120$

$3x + 2y \geqslant 100$

Genre	N° de 1er genre	N° de 2e genre	Minimum d'unité
Vitamine A	2x	3y	120
Vitamine B	3x	2y	100
Coût	5 LE	4 LE	

2- La fonction objective qui est le moindre coût est R = 5x + 4y

3- La représentation graphique, des inéquations linéaires comme dans la figure ci-contre.



4- Les sommets de la région de solution sont:
A (60; 0) , B (12; 32) , C (0; 50).

5- Nous substituons par les coordonnées des sommets dans la fonction objective pour déterminer la moindre dépense possible.

Point	x	y	5x + 4y	Valeur de R
A (60; 0)	60	0	5 (60) + 4 (0)	300
B (12; 32)	12	32	5 (12) + 4 (32)	188
C (0; 50)	0	50	5 (0) + 4 (50)	200

→ moindre dépense possible

Le moindre coût possible est au point B, la quantité du premier genre est12 et la quantité du deuxième genre est 32

Exemple

④ Lien au consommateur : Une usine peut fabriquer deux modèles de bureaux en métal, Un ouvrier assemble les pièces pour faire un modèle. Un autre ouvrier le peint. Le premier ouvrier prend 2 heures pour assemble le premier modèle et 3 heures pour assembler le deuxième modèle. Le deuxième ouvrier prend $1\frac{1}{2}$ heures pour peintre le premier modèle et 2 h pour peindre le deuxième modèle. Si le premier ouvrier travaille 6 heures par jour au moins et le deuxième ouvrier 6 heures par jour au plus. Le bénéfice de l'usine est 50 LE pour (chaque unité des deux modèles, quel est le nombre d'unités que l'usine doit produire des deux genres pour réaliser le plus grand gain possible.

Solution

Suppose que le nombre du premier modèle est x et nombre du deuxième modèle est y.

N° d'unités	Nombre d'heures de l'assemblage	Heures Nombre d'heures de périmètre	Bénéfice en Livres
Premier type x	2	$1\frac{1}{2}$	50
Deuxième type y	3	2	50

Alors $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$2x + 3y \geqslant 6$

$1\frac{1}{2}x + 2y \leqslant 6$ **Alors** $3x + 4y \leqslant 12$

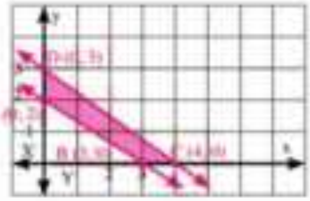
La fonction objective :

Le gain est le plus grand possible $R = 50x + 50y$

Le point	x	y	50x + 50y	Valeur R
A (0, 2)	0	2	50(0) + 50 (2)	100
B (3, 0)	3	0	50(3) + 50 (0)	150
C (4, 0)	4	0	50(4) + 50 (0)	200
D (0, 3)	0	3	50(0) + 50 (3)	150

⟶ Le plus grand bénéfice possible

$\therefore$ Le bénéfice maximal = 200 LE au point (4; 0)



Essaie de résoudre

4 **Le lien au consommateur** Deux aliments, le premier aliment fournit 3 calories et 5 unités de vitamine C. le deuxième aliment fournit 6 colories et 2 unités de vitamine C. Le prix de l'unité du premier aliment est 6 LE et celui du deuxième est 8 LE. On veut au moins 36 calories et 25 unités de vitamines C. Quelle quantité faut-il acheter de chacun des deux aliments pour réaliser cette demande au moindre coût possible ?

Test de compréhension

Le lien à l'agriculture: Un paysan a trouvé qu'il peut améliorer ses plantes, s'il utilise au moins 16 unités de nitrates, 9 unités de phosphates comme engrais pour chaque kirate. Il y a deux genres d'engrais A, B. Les constituants et le coût de chaque genre sont indiqués dans le tableau suivant:

Engrais	Nombre d'unité pour chaque kg		Coût
	Nitrate	Phosphate	
A	4	1	170 Pt
B	2	3	150 pt

Trouver la valeur minimale de coût du mélange des deux engrais A, B qui permettent à l'agriculteur d'assurer le nombre suffisant des unités de nitrate et de phosphate pour améliorer la qualité de ses récoltes

Activité

Si la droite qui représente la fonction objective est parallèle à l'un des côtés de la région de solution. Est ce que la valeur de la fonction objective au n'importe quel point sur ce côté changera ?

Exemple

(5) Trouver la valeur maximale possible de la fonction $R = 3x + 6y$ sous les contraintes suivantes

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 5$, $2x + y \leqslant 6$, $x + 2y \leqslant 8$

Solution

on dessine $L_1 : x = 0$, $L_2 : y = 0$

$L_3 : x + y = 5$

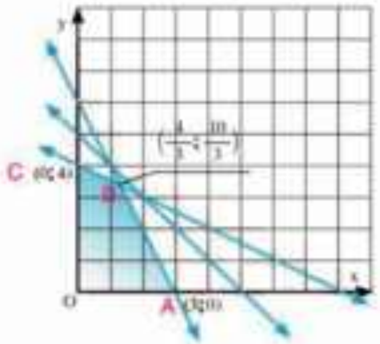
x	0	5
y	5	0

$L_4 : 2x + y = 6$

x	0	3
y	6	0

$L_5 : x + 2y = 8$

x	0	8
y	4	0



La partie colorée dans la figure OABC représente l'ensemble de solution. Le point est $(\frac{4}{3};\frac{10}{3})$.

Pourquoi ?

Le point	x	y	3x + 6y	Valeur R
A	3	0	$3 \times 3 + 0$	9
B	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$	$3 \times \frac{4}{3} + 6 \times \frac{10}{3}$	24
C	0	4	$3 \times 0 + 6 \times 4$	24

Remarque que : La valeur maximal de la fonction objectif = 24 qui est vérifié par les deux points B et C.

1- Est-ce que la droite $\overleftrightarrow{BC}$ est parallèle à la fonction objective. Interpréter la réponse

2- Trouver la valeur de la fonction objective au milieu de $\overline{BC}$, que remarques-tu ?

3- Est-ce que la phrase suivante est vraie ? Expliquer

"Si la valeur maximale (ou minimale) existe en deux points dans la région de solution du système, donc chaque point du segment qui relie les 2 points donne la même voleur"

Résumé de l'unité

➢ L'inéquation linéaire a 2 inconnues

L'inéquation du premier degré à 2 inconnues est ressemble à l'équation du premier degré à 2 inconnues et la différence entre elles que le symbole de l'équation est l'égalité et que le symbole de l'inéquation est l'inégalité, exemple $y > 5x + 1$ est une inéquation linéaire à 2 inconnues x mais $y = 5x + 1$ est une équation linéaire à 2 inconnues en lien.

L'ensemble solution d'une inéquation linéaire est un demi-plan du plan cartésien. Pour représenter l'inéquation linéaire, on trace d'abord la droite frontière et on la trace pointillée s'il n'approuve pas l'inéquation ($>$ ou $<$) et une droite solide s'il vérifie l'inéquation ($\leqslant$ ou $\geqslant$) puis on vérifie par un point pour hacheur la région qui fait que les inéquations sont vraies

➢ Résolution d'un système d'inéquations linéaires

Les deux inéquations linéaires ou plus forment un système d'inéquations linéaires. Pour trouver la région de solution d'un système d'inéquations linéaires, on trace graphiquement chaque inéquation et on trouve la région de solution est la partie commune des inéquations.

➢ La programmation linéaire

La programmation linéaire est une méthode mathématique qui nous permet d'atteindre la meilleure décision pour résoudre un problème vital ou atteindre le meilleur résultat possible pour approuver un but déterminé, tel que approuver le moindre coût ou un bénéfice maximal pour un projet déterminé en considérant les conditions et les contraintes de la production et le marché ou le problème en étude et ceci est approuvé à travers:

1- Analyser la situation ou le problème pour déterminer les contraintes. et les placer sous forme d'un système d'inéquations linéaires

2- Déterminer la fonction objective sous une forme linéaire ($a x + by$)

3- Déterminer l'espace de solution du problème.

4- Chercher la valeur ou les valeurs de l'espace de solution qui vérifie la fonction objectif.

Objectifs de l'unité

A la fin de l'unité, l'élève doit être capable de :

- Définir la quantité scalaire, la quantité vectorielle et le segment orienté . On l'exprime par ses extrémités dans le plan.
- Définir le vecteur de position et le mettre sous la forme de polaire.
- Trouver la norme du vecteur et le vecteur nul.
- Définir et résoudre les exercices sur l'équivalent des deux vecteurs.
- Définir le vecteur unitaire en exprimant par les vecteurs des bases.
- Définir les vecteurs parallèles et les vecteurs orthogonaux.
- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
- Addition de deux vecteurs et soustraction des deux vecteurs.
- Démontrer quelques théorèmes de la géométrie en utilisant des vecteurs.
- Résoudre des applications de la géométrie plane sur les vecteurs.

Expressions de base

- Quantité scalaire
- Quantité vectorielle
- Vecteur
- Distance
- Déplacement
- Vecteur de position
- Ordre couple
- Valeur absolue
- Norme
- Vecteur équivalent
- Addition des vecteurs
- Règle du triangle
- Règle du parallélogramme
- Soustraction des vecteurs
- Résultante des forces
- Vitesse relative

Leçons de l'unité

Leçon (3 - 1) : Quantité scalaire, quantité vectorielle, segment orienté

Leçon (3 - 2) : Vecteurs.

Leçon (3 - 3) : Opération sur les vecteurs.

Leçon (3 - 4) : Applications sur les vecteurs.

Matériel utilisé

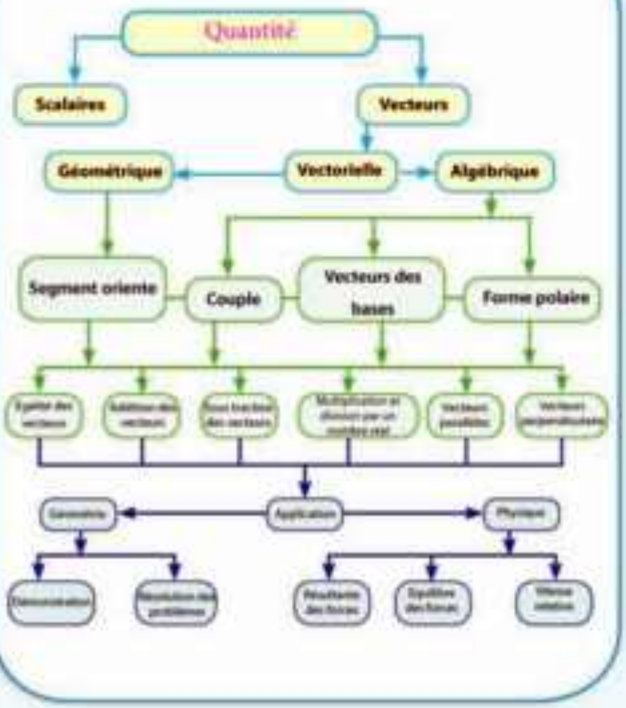
Ordinateur – projecteur – programme graphique – feuille quadrillée – appareil géométrique – fils poids – clous.

Historique

Les savants arabes ont mis la base de la géométrie analytique ils ont utilisé l'algèbre pour résoudre les problèmes de géométrie et ils ont utilisé la géométrie pour résoudre les équations algébriques et le savant Sabet ben Kora (835 – 900) a mis des solutions géométriques pour quelques équations et le savant El Kendi dans ses oeuvres a mis une relation entre l'algèbre et la géométrie.

Et au début du dix-septième siècle Fermat (1601 – 1665) et René Descartes (1596 – 1650) ont trouvé une méthode simple pour résoudre les problèmes géométriques algébriquement. Et comme nous savons que la géométrie analytique dépend des deux dimensions alors ils ont déterminé n'importe quelle figure géométrique par deux longueurs notées par x et y. Cette nouvelle science est appelée géométrie analytique qui a donné la possibilité de trouver les théorèmes et les vérités par une méthode algébrique. Cette science a aidé de trouver les sciences de différentiel et de l'intégral par Newton (1642 – 1727) et Leibniz (1646 – 1716) et Gibbs (1839 – 1903) a fait l'analyse des vecteurs en trois dimensions.

Organigramme de l'unité



3 - 1 Quantité scalaire, Quantité vectorielle et Segment orienté

Apprendre

- Classification et la distinction des quantités scalaires et les quantités vectorielles
- Le concept d'un segment orienté et sa sens et sa norme
- Définir le segment équivalent
- Structure un segment orienté équivalent a un autre segment orienté dans le plan des coordonnées
- Représenter le segment orienté en fonction de ses extrémités

Expression de base

- Quantité scalaire
- Quantité vectorielle
- Distance
- Déplacement
- Direction

Matériel et moyens

- Instruments géométriques
- Ordinateur
- Programme graphique
- Projecteur

Introduction :

Il existe des quantités qui dépendent seulement sur le nombre qui détermine sa valeur comme la longueur – l'aire – le volume …

Il y a d'autres quantités qui ne dépendent pas seulement sur le nombre pour indiquer sa valeur comme le vent nous devrons définir sa direction. Alors le mouvement de l'air est définir par la valeur et la direction, la force qui agit sur un corps dépend sur la valeur et la direction, alors il existe deux quantités.

Quantité scalaire

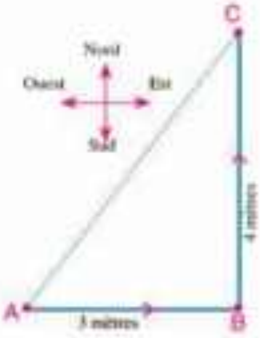
Elle est complètement déterminer par sa valeur, c'est le cas de la longueur, la masse, le temps, la température et le volume.

Quantité vectorielle

Elle est déterminée par deux données, une valeur et une direction. Par exemple la force, le déplacement et la vitesse.

Réfléchis et discute

Si un corps se déplace 3 mètres du point A à l'Est, puis 4 mètres au Nord et s'arrête au point C.



- Trouver la distance parcourue par le corps.
- Quelle est la distance entre le corps et le point A ?

Remarque que :

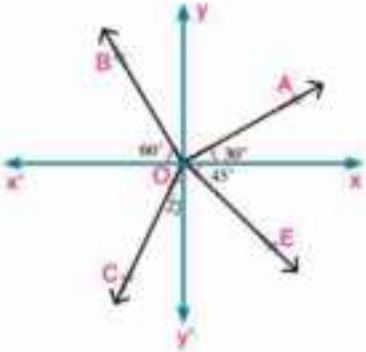
- **La distance** est une quantité scalaire et c'est le résultat de AB + BC ou CB + BA.
- **Le déplacement** est la distance entre le point de commencement et le point final seulement et dans la direction unique de A à C. Alors pour définir le déplacement nous pouvons savoir la distance de AC et la direction de A à C. Alors le déplacement est une quantité vectorielle.

Essaie de résoudre

(1) **Dans la figure ci-contre:** Calcule la distance et le déplacement quand un corps se déplace de A à C, puis il retourne à B

La direction

1- Chaque demi-droite dans le plan détermine un sens dans la figure ci-contre



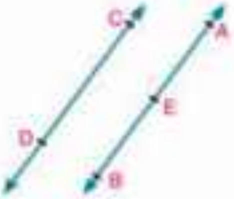
$\overrightarrow{Ox}$ est le sens de l'Est, $\overrightarrow{Ox'}$ est le sens de l'Ouest,

$\overrightarrow{Oy}$ est le sens du Nord, $\overrightarrow{Oy'}$ est le sens du Sud

Quel est le sens déterminé par

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$?

2- Si $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $E \in \overline{AB}$, alors :



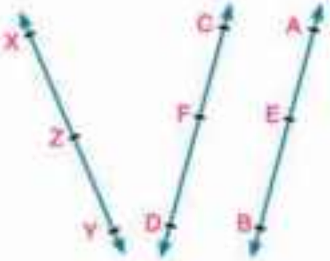
- $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BE}$ ont même sens et appartiennent à une droite.
- $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{DC}$ ont même sens et se trouvent sur deux droites parallèles.
- $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EB}$ ont deux sens contraires et appartiennent à une droite
- $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CD}$ ont deux sens contraires et appartiennent à deux droites parallèles.

En général

- Les demi-droites ont même sens ou deux sens contraires, se trouvent sur une même droite ou sur des droites parallèles.
- Les demi-droites ont sens différents ne peuvent pas appartenir à une droite ou deux droites parallèles.

Essaie de résoudre

(2) **Dans la figure ci-contre:** $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ sont parallèles et chacun d'elles ne sont pas parallèles à la droite $\overleftrightarrow{YX}$, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{CD}$, $Z \in \overline{XY}$.



Déterminer si les demi-droites suivantes ont même sens, en sens contraire ou de sens différents.

A $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DF}$ **B** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{XY}$ **C** $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EB}$

D $\overrightarrow{ZY}$, $\overrightarrow{ZX}$ **E** $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{ZX}$ **F** $\overrightarrow{ZX}$, $\overrightarrow{ZY}$

Segment orienté :

Les 2 points A, B sont les extrémités de $\overline{AB}$ ou $\overline{BA}$. si on détermine l'un des deux points comme un point d'origine et l'autre point final en ce cas, nous devrons déterminer un sens pour le segment, c'est la demi-droite qui porte le segment et son point d'origine est le même que celui du segment

$\overline{AB}$ c'est la demi-droite $\overline{AB}$ et a le même point d'origine du segment. Si A est le point d'origine et B est le point final, on définie le segment par le segment orienté de A à B et noté $\overrightarrow{AB}$.

Réfléchis et discute

- Est-ce que $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$? Est-ce que $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{BA}$? Expliquer ta réponse.
- Est-ce que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$ différentes ou en sens contraire ? pourquoi ?

Définition 1

Le segment orienté est un segment qui a un point d'origine, point final et un sens.

Essaie de résoudre

3. A, B, C sont trois points dans le plan, écrire tous les segments orientés qui sont déterminés par ces trois points.

Définition 2

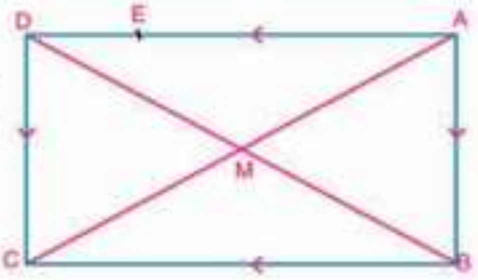
Norme d'un segment orienté : norme de $\overrightarrow{AB}$ est la longueur de $\overline{AB}$ et noté par $\| \overrightarrow{AB} \|$.

Remarque que $\| \overrightarrow{AB} \| = \| \overrightarrow{BA} \| = AB$

Définition 3

Deux segments orientés sont équivalents, s'ils ont la même norme et le même sens.

Exemple



① **Dans la figure ci-contre :** ABCD est un rectangle dont les diagonales se coupent en M. E ∈ $\overline{AD}$, alors :

$\overline{AB} // \overline{CD}$ et AB = CD , $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, BC=AD et

MA = MC = MB = MD

A $\because \|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DC}\|$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même sens

$\therefore$ $\overrightarrow{AB}$ est équivalent à $\overrightarrow{DC}$

B $\because \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$ et $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MC}$ ont même sens

$\therefore$ $\overrightarrow{AM}$ est équivalent à $\overrightarrow{MC}$

C $\because \|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ et $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont deux sens différents

$\therefore$ $\overrightarrow{MA}$ n'est pas équivalent à $\overrightarrow{MB}$

D $\because \|\overrightarrow{AE}\| \neq \|\overrightarrow{CB}\|$ et $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même sens

$\therefore$ $\overrightarrow{AE}$ n'est pas équivalent à $\overrightarrow{BC}$

Essaie de résoudre

④ ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en M.

1- Nommer les segments orientés (s'ils existent) et qui sont équivalents à :

A $\overrightarrow{AB}$ **B** $\overrightarrow{CD}$ **C** $\overrightarrow{BC}$ **D** $\overrightarrow{AM}$ **E** $\overrightarrow{MD}$

2- Dire pourquoi les segments orientés suivants ne sont pas équivalents :

A $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AC}$ **B** $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$ **C** $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{DM}$

Réflexion logique :

1- Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont équivalents, qu'est-ce que tu conclus ?

2- Quel est le nombre de segments orientés que nous pouvons tracer dans le plan et chacun d'eux est équivalent à $\overrightarrow{AB}$?

3- Du point C du plan, quel est le nombre de segments orientés que nous pouvons tracer et chacun d'eux est équivalent à $\overrightarrow{AB}$?

Remarque que :

Il existe un seul segment orienté que l'on trace du point C ($\overrightarrow{CD}$ exemple) tel que $\overrightarrow{CD}$ soit équivalent à $\overrightarrow{AB}$.

Exemple

② **Les segments orientés dans un repère orthogonal :**

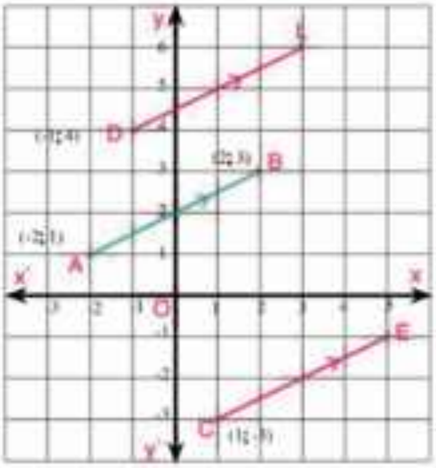
Dans un repère orthogonal, déterminer les points A(–2; 1), B(2; 3), C(1; –3), D(–1; 4), puis tracer $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{DL}$ chacun d'eux est équivalent à $\overrightarrow{AB}$. Trouver les coordonnées des points E et L.

Solution

Pour tracer $\overrightarrow{CE}$ équivalent à $\overrightarrow{AB}$, il faut que $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AB}$ aient même sens et la même norme.

C'est-à-dire $\overrightarrow{EC} // \overrightarrow{AB}$, $\|\overrightarrow{CE}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ = longueur de $\overline{AB}$.

- Traçons $\overrightarrow{CE} // \overrightarrow{AB}$ (pente de $\overline{AB}$ = pente de $\overline{CE} = \frac{1}{2}$)
- Déterminons la longueur de $\overline{EC}$ = la longueur de $\overline{AB}$ en utilisant le compas ou en utilisant le nombre de carrés horizontaux et verticaux, nous trouvons que E (5; –1), de même nous traçons $\overrightarrow{DL}$,et nous trouvons que : L (3; 6).



Remarque que :

Puisque la translation conserve le parallélisme des droites, les longueurs des segments et en considérant que le point C c'est l'image du point A, par la translation (1 – (–2); –3 –1) = (3; -4)

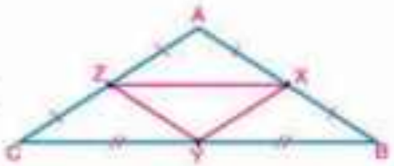
∴ Pour tracer $\overrightarrow{CE}$ équivalent à $\overrightarrow{AB}$, on trouve que $\overrightarrow{CE}$ est l'image de $\overrightarrow{AB}$ par la translation (3; -4) ainsi les coordonnées du point E = (2 + 3; 3 + (-4)) = (5; -1)

En utilisant la translation : Déterminer les coordonnées du point R qui rend $\overrightarrow{OR}$ équivalent à $\overrightarrow{AB}$

Essaie de résoudre

5) Dans un plan de repère orthogonal, déterminer les points A (2; 3), B (–2; 6), C (5; –3), D (2; 5), puis tracer $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{LD}$, $\overrightarrow{FR}$ chacun d'eux est équivalent à $\overrightarrow{AB}$ puis trouver les coordonnées de chacun des points E, L, R.

Test de compréhension



Dans la figure ci-contre : ABC est un triangle tel que AB = AC .
X, Y, Z sont les milieux de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ respectivement.

Premièrement : Laquelle des expressions suivantes est correcte ?

A $\|\overrightarrow{XY}\| = \|\overrightarrow{ZY}\|$.

B $\overrightarrow{XY}$ est équivalent à $\overrightarrow{ZY}$.

C $\overrightarrow{BY}$ est équivalent à $\overrightarrow{ZX}$.

Deuxièmement : Ecrire les segments orientés (s'ils existent) et qui sont équivalents à chacun de ce qui suit :

A $\overrightarrow{BX}$ **B** $\overrightarrow{AZ}$ **C** $\overrightarrow{XZ}$

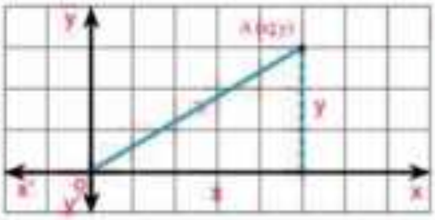
D $\overrightarrow{CY}$ **E** $\overrightarrow{XY}$ **F** $\overrightarrow{ZY}$

Vecteurs

3 - 2

Introduction

On peut déterminer la position du point A dans le repère orthogonal en connaissant le couple (x; y) correspondant au point A, car chaque point dans le repère a une position unique par rapport au point d'origine O.



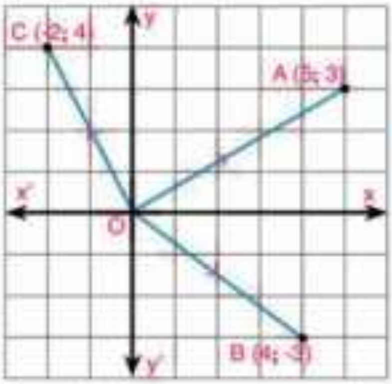
Vecteur de position pour un point connu par rapport au point d'origine

Définition 4

Vecteur de position d'un point connu par rapport au point d'origine : c'est le segment orienté dont le point initial est le point d'origine et se termine par le point connu.

Exemple

① **Dans la figure ci-contre :**
A (5; 3), B(4; -3), C (-2; 4) ainsi:



- $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur de position du point A par rapport au point d'origine O et correspond au couple (5; 3) et on l'écrit $\overrightarrow{OA} = (5; 3)$.
- $\overrightarrow{OB}$, c'est le vecteur de position du point B par rapport au point d'origine tel que $\overrightarrow{OB} = (4; -3)$ de même $\overrightarrow{OC} = (-2; 4)$

Remarque : Puisque tous les vecteurs de position ont le même point d'origine (O), alors on peut donner au vecteur de position $\overrightarrow{OA}$ le symbole $\overrightarrow{A}$, au vecteur de position $\overrightarrow{OB}$ le symbole $\overrightarrow{B}$ et ainsi de suite, ainsi $\overrightarrow{A} = (5; 3)$, $\overrightarrow{B} = (4; -3)$, $\overrightarrow{C} = (-2; 4)$.

Norme d'un vecteur :

c'est la longueur du segment qui représente le vecteur.

Si $\overrightarrow{R} = (x; y)$

Alors $\| \overrightarrow{R} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Apprendre

- Déterminer le vecteur de position d'un point connu par rapport au point d'origine dans un repère orthogonal.
- Mettre le vecteur sous la forme polaire.
- Trouver la norme d'un vecteur et reconnaître le vecteur nul.
- Concept de l'équivalence de deux vecteurs et résoudre quelques exemples sur elle.
- Addition de deux vecteurs algébriquement.
- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel.
- Exprimer un vecteur en fonction des vecteurs unitaires de même base.
- Condition du parallélisme de deux vecteurs.
- Condition des deux vecteurs perpendiculaires.
- Multiplication d'un vecteur par un nombre réel et la représentation d'un vecteur géométriquement.

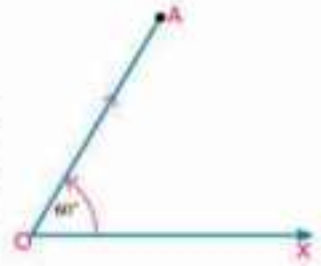
Expression de base

- Vecteur
- Vecteur de position
- Couple
- Valeur absolue
- Norme
- Vecteurs équivalents
- Addition des vecteurs
- Multiplication
- Forme polaire
- Vecteur unitaire
- Magnitude

Essaie de résoudre

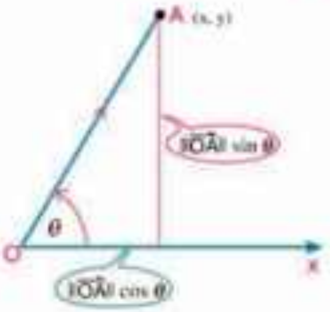
1) Dans un repère orthogonal, si A $(2; -1)$, B $(5; 0)$ et C $(-2; -3)$, trouver le vecteur de position pour chacun des points précédents par rapport au point d'origine et tracer le segment orienté qui le représente dans le repère

Réfléchis et discute



La figure ci-contre représente un segment orienté $\overrightarrow{OA}$, de norme 4 cm et fait un angle 60° avec la direction positive de l'axe des abscisses. Comment peut on trouver le vecteur de position du point A par rapport au point d'origine O dans le repère orthogonal.

Forme polaire d'un vecteur de position



Dans la figure ci-contre, le vecteur $\overrightarrow{OA}$ forme un angle θ avec la direction positive de l'axe des abscisses et de norme égale $\|\overrightarrow{OA}\|$. peut être exprimé comme suit :

$\overrightarrow{OA} = (\|\overrightarrow{OA}\|, \theta)$ forme polaire du vecteur.

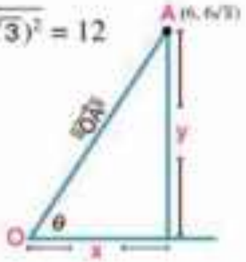
Les coordonnées du point A dans le repère orthogonal sont :

$$x = \|\overrightarrow{OA}\| \cos\theta \quad , \quad y = \|\overrightarrow{OA}\| \sin\theta \quad , \quad \text{tg } \theta = \frac{y}{x}$$

Exemple

2) Dans un repère orthogonal, si A $(6; 6\sqrt{3})$, trouver la forme polaire du vecteur de position A par rapport au point d'origine O.

Solution



$\because \overrightarrow{OA} = (6; 6\sqrt{3})$ $\quad\quad$ $\therefore \|\overrightarrow{OA}\| =$ la longueur $\overline{OA} = \sqrt{(6)^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12$

et $\text{tg } \theta = \frac{y}{x} = \frac{6\sqrt{3}}{6} = \sqrt{3} \; ; \theta \in \left]0 \; ; \frac{\pi}{2}\right[$

$\therefore \theta = \text{tg}^{-1}(\sqrt{3}) = 60° = \frac{\pi}{3}$ $\quad\quad$ $\therefore \overrightarrow{OA} = (12; \frac{\pi}{3})$

Essaie de résoudre

2) **A** Si $\overrightarrow{OA} = (8\sqrt{3}; 8)$, trouver la forme polaire du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

B Si $\overrightarrow{OC} = (12\sqrt{2}; \frac{3\pi}{4})$ vecteur de position du point C par rapport au point d'origine O, trouver les coordonnées du point C.

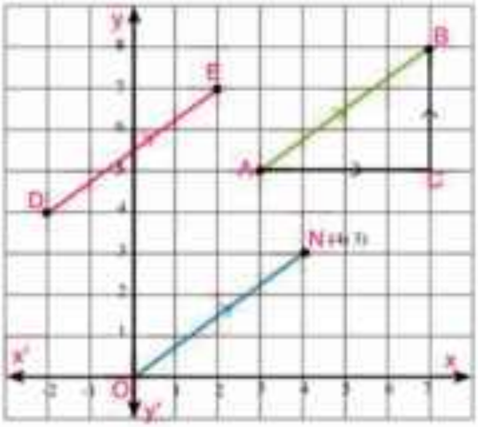
Réfléchis : Quel est le vecteur de position du point d'origine $0\,(0; 0)$ dans un repère orthogonal.

Le vecteur nul :

$\overrightarrow{O} = (0, 0)$ est noté par le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ et $\|\overrightarrow{O}\| = \|\text{zéro}\|$ le vecteur nul n'a pas de sens.

Vecteurs équivalents

En supposant qu'un corps se déplace de A jusqu'à atteindre B après avoir traversée 4 unités à droite et 3 unités vers le haut, ainsi $\overrightarrow{AB}$ représente le vecteur de déplacement du corps de A vers B.



Nous pouvons représenter $\overrightarrow{AB}$ dans un repère orthogonal par une infinité de segments orientés parallèles . Chacun d'eux est équivalent à $\overrightarrow{AB}$ et l'un des segments est le vecteur de position $\overrightarrow{ON}$.

C'est-à-dire : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE} = \ldots\ldots = \overrightarrow{ON} = (4; 3)$

Alors: $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{DE}\| = \ldots\ldots = \|\overrightarrow{ON}\|$

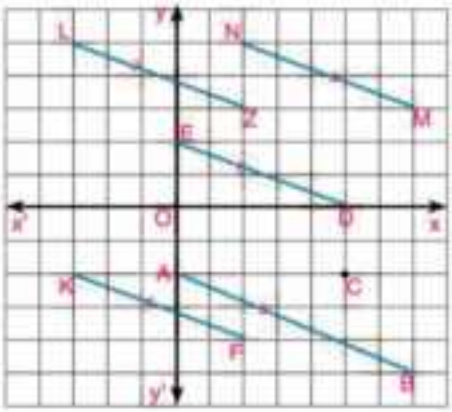
$= \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$ unités de longueur.

Essaie de résoudre

3) Dans la figure ci-contre :

A Déterminer le vecteur de position du point C par rapport au point d'origine O, puis trouver sa norme.

B Déterminer tous les éléments de l'ensemble des vecteurs qui chacun d'eux est équivalent à $\overrightarrow{OC}$.



Tu as remarqué le lien des vecteurs aux éléments du couple (x, y) tels que $(x, y) \in R^2$, ainsi il est possible de définir les vecteurs comme suit :

Définition 5

Les vecteurs : Les éléments de l'ensemble R^2 avec les opérations d'addition et de multiplication définies sur elle est nommé vecteur.

Les vecteurs sont dénotés par l'un des symboles $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{R}$ .... tels que:

$\overrightarrow{M} = (2; 3)$, $\overrightarrow{N} = (-7; 2)$, $\overrightarrow{F} = (0; 5)$ .... ainsi de suite

L'addition des deux vecteurs algébriquement

Pour tout $\overrightarrow{A} = (x_1; y_1) \in R^2$, $\overrightarrow{B} = (x_2; y_2) \in R^2$

Ainsi $\boxed{\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \in R^2}$

Exemple : $(3; -2) + (5; 7) = (3 + 5; -2 + 7) = (8; 5)$

On note la multiplication cartésienne R × R par le symbole R^2 qui se lit : R deux

Opération de l'addition a les propriétés suivantes :

Propriété de la composition interne :	Pour tout $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in R^2$, alors $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} \in R^2$
Propriété de la commutativité :	Pour tout $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in R^2$, alors $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$
Propriété de l'associativité :	Pour tout $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in R^2$, alors $\overrightarrow{A} + (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$
Propriété de la présence de l'élément neutre :	Pour tout $\overrightarrow{A} \in R^2$ Il existe $\overrightarrow{O} = (0; 0) \in R^2$ tels que $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{A} = \overrightarrow{O} + \overrightarrow{A}$
Propriété de l'abondance des opposés :	Pour tout $\overrightarrow{A}$ $(x; y) \in R^2$ Il existe $-\overrightarrow{A} = (-x; -y) \in R^2$ tels que $\overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{O} = (-\overrightarrow{A}) + \overrightarrow{A}$
Propriété de la simplification :	Pour tout $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}, \overrightarrow{C} \in R^2$ si $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}$, alors $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$

Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Pour tout $\overrightarrow{A} = (x, y) \in R^2$, , $K \in R$: $\quad K\overrightarrow{A} = K(x, y) = (Kx, Ky) \in R^2$

Par exemple : $3(2; -5) = (6; -15)$, $\frac{1}{2}(4; 9) = (2; \frac{9}{2})$, $4(0; 0) = (0; 0)$, $-2(3; -4) = (-6; 8)$

Opération de la multiplication a les propriétés suivantes :

Propriété de la distributivité :	Premièrement : Pour tout $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in R^2$, $K \in R$ On a $K(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = K\overrightarrow{A} + K\overrightarrow{B}$ Deuxièmement : Pour tout $\overrightarrow{A} \in R^2$, $K_1, K_2 \in R$ On a $(K_1 + K_2)\overrightarrow{A} = K_1\overrightarrow{A} + K_2\overrightarrow{A}$
Propriété de l'associativité	Pour tout $\overrightarrow{A} \in R^2$, $K_1, K_2 \in R$ On a : $(K_1 K_2)\overrightarrow{A} = K_1(K_2\overrightarrow{A})$
Propriété de la simplification	Pour tout $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B} \in R^2$, $K \in R^*$ Si $K\overrightarrow{A} = K\overrightarrow{B}$; alors: $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ et vice versa

Remarque que : Si $\overrightarrow{U} = (x_1, y_1)$ est équivalent à $\overrightarrow{V} = (x_2, y_2)$,
alors $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ (propriété de l'égalité des couples), et nous disons que les deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont égaux.

Exemple

3 Si $\overrightarrow{A} = (6; -2)$ et $\overrightarrow{B} = (4; 3)$

A Trouver $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}$ **B** Exprimer $\overrightarrow{C} = (11; 5)$ en fonction de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$

Solution

A $2\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B} = 2(6; -2) - 3(4; 3) = (12; -4) + (-12; -9) = (0; -13)$

B En supposant que $\overrightarrow{C} = K_1\overrightarrow{A} + K_2\overrightarrow{B}$, tel que $K_1, K_2 \in R$

$= K_1(6; -2) + K_2(4; 3) = (6K_1 - 2K_1) + (4K_2 + 3K_2)$

$= (6K_1 + 4K_2, -2K_1 + 3K_2)$

et de la propriété de l'égalité de deux couples, on déduit que:

$6K_1 + 4K_2 = 11$ **(1)** , $-2K_1 + 3K_2 = 5$ **(2)**

Après la résolution de (1) et (2), on obtient que $K_1 = \frac{1}{2}$, $K_2 = 2$ $\therefore \overrightarrow{C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A} - 2\overrightarrow{B}$

Essaie de résoudre

4 si $\overrightarrow{A} = (2; -6)$, $\overrightarrow{B} = (-2; 5)$ et $\overrightarrow{C} = (-6; 14)$

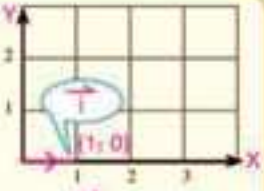
A Trouver $\overrightarrow{2A}$, $\overrightarrow{-B}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$ **B** Exprimer $\overrightarrow{C}$ en fonction de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$.

Vecteur unitaire : C'est un vecteur de norme = 1

Représentation du vecteur en fonction des vecteurs unitaires de base.

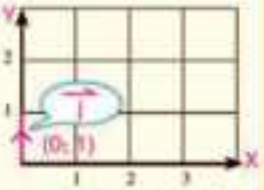
Définition: 6

➤ **Vecteur unitaire $\overrightarrow{i}$: C'est le segment orienté dont le point initial est le point d'origine, sa norme est l'unité et sa direction est la direction positive de l'axe des abscisses.**



$\overrightarrow{i} = (1; 0)$

➤ **Vecteurs unitaire $\overrightarrow{j}$: c'est le segment orienté dont le point initial est le point d'origine, sa norme est l'unité et sa direction est la direction positive de l'axe des ordonnées.**



$\overrightarrow{j} = (0; 1)$

Si $\overrightarrow{M} = (x; y)$

$\therefore \overrightarrow{M} = (x; 0) + (0; y)$ — de la définition de l'addition.

$= x\,(1; 0) + y\,(0; 1)$ — de la définition de la multiplication.

$= x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

alors: $\|\overrightarrow{M}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Exemple

4 Exprime chacun des vecteurs suivants en fonction des vecteurs unitaires de base:

A $\overrightarrow{M} = (2; 7)$ **B** $\overrightarrow{N} = (4; -3)$ **C** $\overrightarrow{L} = (-5; 0)$ **D** $\overrightarrow{Z} = (0; -\frac{3}{2})$

Solution

A $\overrightarrow{M} = 2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j}$ **B** $\overrightarrow{N} = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$

C $\overrightarrow{L} = -5\overrightarrow{i}$ **D** $\overrightarrow{Z} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{j}$

Essaie de résoudre

(5) Exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction des vecteurs unitaires de base, puis trouver sa norme.

A $\overrightarrow{M} = (-3; 4)$ **B** $\overrightarrow{N} = (5; -12)$ **C** $\overrightarrow{L} = (-3; -6)$ **D** $\overrightarrow{Z} = (-7; 0)$

Exemple

(5) Trouver en fonction des vecteurs unitaires de base, le vecteur qui exprime chacun de ce qui suit:

A La vitesse uniforme d'une auto qui parcourt de 90 km par chaque heure dans la direction de l'Est.

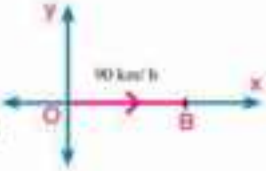
B Une force qui a une intensité de 50 Newton et qui agit sur un point matériel dans la direction de 30° Nord-Est.

Solution

A En supposant que le vecteur de position de la vitesse de l'auto est $\overrightarrow{OB} = (x, y)$.

$\therefore x = 90$, $y = 0$

$\overrightarrow{B} = 90\ \overrightarrow{i}$

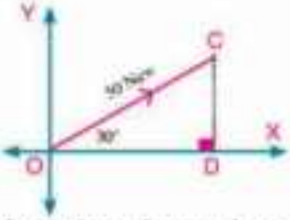


B En supposant que le vecteur de position de la force donnée est $\overrightarrow{OC} = (x, y)$

$\therefore x = 50 \cos 30° = 25\sqrt{3}$,

, $y = 50 \sin 30° = 25$

$\overrightarrow{C} = 25\sqrt{3}\ \overrightarrow{i} + 25\ \overrightarrow{j}$



Essaie de résoudre

(6) Trouver en fonction des vecteurs unitaires de base, le vecteur qui exprime chacun de ce qui suit

A Le déplacement d'un corps par une distance de 60 cm dans la direction du Sud.

B Une force de 30kg p, qui agit sur un corpuscule dans la direction de 60° Nord – Ouest.

Parallélisme des deux vecteurs et ses orthogonaux

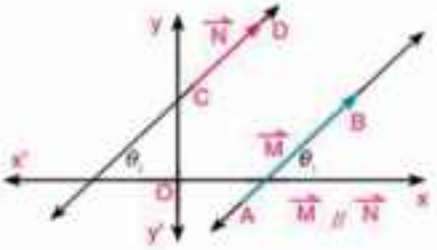
Pour tout $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{N}$ deux vecteurs non nuls tels que

$\overrightarrow{M} = (x_1, y_1)$ et $\overrightarrow{N} = (x_2, y_2)$

1- Si $\overrightarrow{M} \mathbin{/\!/} \overrightarrow{N}$

alors $\text{tg}\ \theta_1 = \text{tg}\ \theta_2$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$

et on a $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ et vice versée

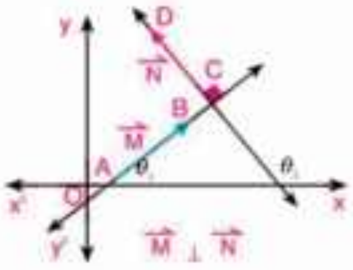


2- Si $\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{N}$

alors $\text{tg}\,\theta_1 \times \text{tg}\,\theta_2 = -1$

$\frac{y_1}{x_1} \times \frac{y_2}{x_2} = -1$

donc $x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = 0$ et vice versa.



Remarque que:

Si $\overrightarrow{A} = (2; 4)$, $\overrightarrow{B} = (-6; 3)$ et $\overrightarrow{C} = (4; 8)$,

alors $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$ Car $2 \times -6 + 4 \times 3 = -12 + 12 =$ zéro.

$\overrightarrow{A} \,//\, \overrightarrow{C}$ Car: $2 \times 8 - 4 \times 4 = 16 - 16 =$ zéro.

$\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{C}$ Car: $-6 \times 4 + 3 \times 8 = -24 + 24 =$ zéro.

Exemple

6 Si $\overrightarrow{A} = (2; 5)$ et $\overrightarrow{B} = (K; -4)$, trouver la valeur de k si:

A $\overrightarrow{A} \,//\, \overrightarrow{B}$. **B** $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$.

Solution

A Puisque $\overrightarrow{A} \,//\, \overrightarrow{B}$, alors la condition du cas parallélisme est: $2 \times -4 - 5 \times K =$ zéro

$\therefore -8 - 5K =$ zéro d'où $K = -\frac{8}{5}$

B $\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B}$, alors la condition de cas perpendiculaire est: $2 \times K + 5 \times -4 = 0$

$\therefore 2K - 20 =$ zéro d'où $K = 10$

Essaie de résoudre

7 si $\overrightarrow{A} = (-4; 6)$, $\overrightarrow{B} = (6; -9)$ et $\overrightarrow{C} = (3; 2)$. prouver que: $\overrightarrow{A} \,//\, \overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{B} \perp \overrightarrow{C}$, $\overrightarrow{C} \perp \overrightarrow{A}$

Remarque que

$\overrightarrow{M} = (x, y)$, $K \in R$

alors $K\,\overrightarrow{M} = K\,(x, y) = (K\,x, K\,y)$

et si $\overrightarrow{M}$ est un vecteur non nul, $K \neq$ zéro alors: $\overrightarrow{M} \,//\, K\,\overrightarrow{M}$

et: $\|K\,\overrightarrow{M}\| = |K| \,.\, \|\overrightarrow{M}\|$

tel que le sens de $K\,\overrightarrow{M}$ est le même sens que $\overrightarrow{M}$ pour chaque $K >$ zéro

et le sens de $K\,\overrightarrow{M}$ est le sens contraire que celui de $\overrightarrow{M}$ pour chaque $K <$ zéro

Par exemple:

Si $\overrightarrow{M} = (2; 1)$

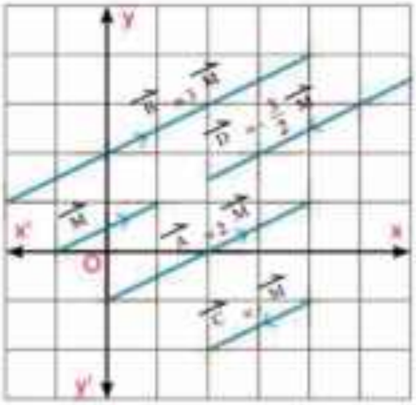
alors $\overrightarrow{A} = 2\,\overrightarrow{M} = 2(2; 1) = (4; 2)$

$\overrightarrow{B} = 3\,\overrightarrow{M} = 3(2; 1) = (6; 3)$

$\overrightarrow{C} = -\,\overrightarrow{M} = -(2; 1) = (-2; -1)$

$\overrightarrow{D} = -\frac{3}{2}\,\overrightarrow{M} = -\frac{3}{2}(2; 1) = (-3; -\frac{3}{2})$

et la figure ci - contre représente ces vecteurs



Essaie de résoudre

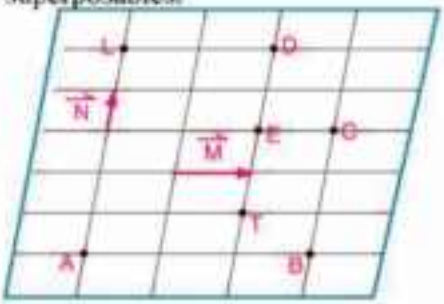
(8) Le réseau ci- contre représente des parallélogrammes superposables.

Premièrement: Exprime chacun des segments orientés suivants, en fonction des vecteurs $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{N}$

A $\overrightarrow{AB}$ **B** $\overrightarrow{CB}$ **C** $\overrightarrow{CE}$

D $\overrightarrow{BC}$ **E** $\overrightarrow{BA}$ **F** $\overrightarrow{TE}$

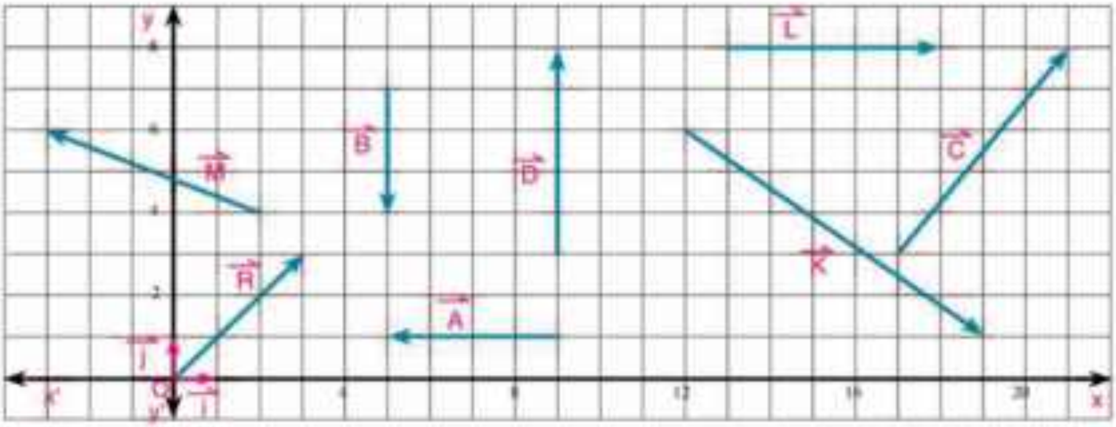
G $\overrightarrow{DL}$ **H** $\overrightarrow{DE}$ **I** $\overrightarrow{LA}$



Deuxièmement: Déduire que $\overrightarrow{AB} = -\,\overrightarrow{BA}$ et interpréter ceci géométriquement

Test de compréhension

La figure suivante représente quelques vecteurs dans un repère orthogonal. Écris chaque vecteur en fonction de des vecteurs unitaires de base.



Opérations sur les vecteurs

3 - 3

Premièrement : Addition des vecteurs géométriquement

Réfléchis et discute

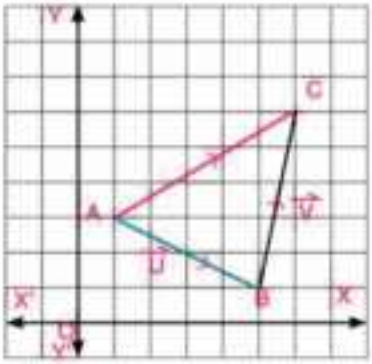
Si $\overrightarrow{AB}$ représente le vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{BC}$ représente le vecteur $\overrightarrow{V}$ tels que:

$\overrightarrow{U} = (4; -2)$ et $\overrightarrow{V} = (1; 5)$

Ecris ce qui est égale à $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$.

Ecris le vecteur qui représente $\overrightarrow{AC}$

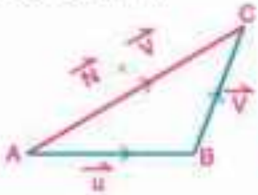
Qu'est ce que tu remarques? Qu' est ce que tu déduis?



Règle du triangle pour l'addition de deux vecteurs

Si $\overrightarrow{AB}$ représente le vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{BC}$ représente le vecteur $\overrightarrow{V}$ **tels que** le point B c'est le point final du vecteur $\overrightarrow{U}$ et lui même est le point d'origine du vecteur $\overrightarrow{V}$.

alors: Le vecteur $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$ représente le segment orienté $\overrightarrow{AC}$



C'est à dire $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{AC}$, $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$

Cette relation est connue par la relation de Charles

Exemple

(1) Un bateau parcourt 300 mètres vers L'Est et 400 mètres vers le Nord pour sortir du port. Calcule le déplacement du bateau jusqu'à qu'il sort du port.

Solution

1- Prenons une échelle convenable en considérant que 1cm représente 100 mètres.

$\therefore$ 3 cm représentent 300 mètres et 4cm représentent 400 mètres.

2- Dessine le parcourt du trajet par l'échelle de dessin en utilisant les instruments géométriques

ainsi le vecteur de déplacement $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Apprendre

- Addition des vecteurs et leur représentation géométrique.
- Règle du triangle pour l'addition de deux vecteurs.
- Règle du parallélogramme pour l'addition de deux vecteurs.
- Soustraction des vecteurs et leur représentation graphique.
- Exprimentation d'un segment orienté en fonction des deux vecteurs de position de ses extrémités

Expression de base

- addition des vecteurs
- soustraction des vecteurs
- Règle du triangle
- Règle du parallélogramme

Matériel et moyens

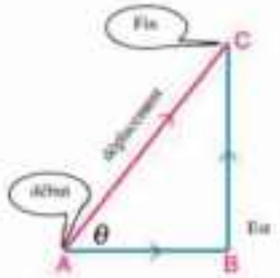
- outils pour le dessin géométrique.
- feuilles de graphique pour le dessin.

3- Mesure la longueur $\overline{AC}$ avec la règle (AC = 5 cm)

4- Norme de déplacement = longueur sur le dessin × l'échelle = $5 \times 100 = 500$ mètres.

5- Sens de déplacement : $\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \simeq 53°$ à un degré près.

$\therefore$ Le bateau est à une distance de 500 mètres du point de départ dans la direction de 53° Nord-Est.

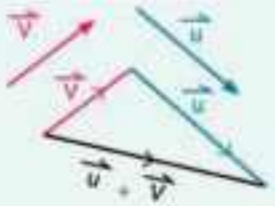


Essaie de résoudre

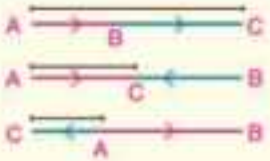
(1) Un camion se déplace de la position A une distance de 80 km dans la direction de l'Ouest puis une distance de 120 km dans la direction de 60° Nord-Ouest jusque il arrive au point B. Trouver l'intensité et la direction de déplacement $\overrightarrow{AB}$.

Remarques importantes:

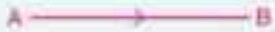
1- N'importe quel de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, il est possible de les additionner (trouver leur résultante) en construisant deux vecteurs consécutifs et équivalents aux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ comme dans la figure ci-contre .



2- Règle de Charles pour l'addition de deux vecteurs est vraie, si les points A,B,C appartiennent à la même droite.
dans les trois figures ci- contre, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

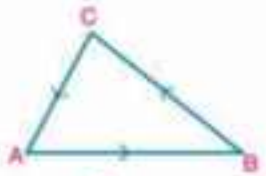


3- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$ (l'élément neutre de l'addition des vecteurs)
$\therefore$ $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$
alors $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

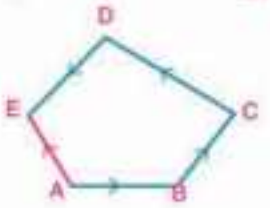


Réfléchis: Déduis la vérité des expressions suivantes:

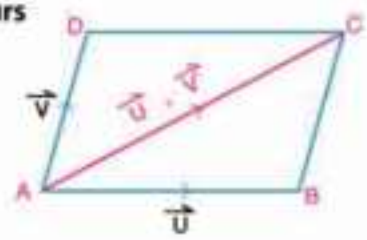
1- Dans le $\triangle$ ABC: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$



2- Dans la figure ABCDE: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$



Règle du parallélogramme pour l'addition de deux vecteurs



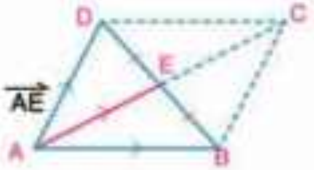
Si $\overrightarrow{AB}$ représente le vecteur $\overrightarrow{U}$, $\overrightarrow{AD}$ représente le vecteurs $\overrightarrow{V}$ et ils ont même point d'origine, ainsi pour trouver $\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}$, on complète le parallélogramme ABCD, et on trace la diagonale $\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{AD}$ est équivalent à $\overrightarrow{BC}$. (pourquoi?)

$\therefore \overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ c'est à dire $\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}}$

cette règle est nommée la règle du parallélogramme pour l'addition de deux vecteurs.

Réfléchis: déduis la vérité des expressions suivantes:



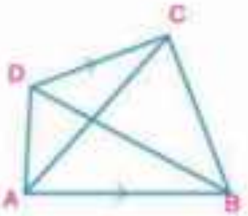
1- $\overrightarrow{M}+\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N}+\overrightarrow{M}$

2- Dans le $\triangle$ ABD, si E est le milieu de $\overline{BD}$, alors: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\,\overrightarrow{AE}$

Exemple

2 Dans n'importe quel quadrilatère ABCD, prouver que: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

Solution



Dans le $\triangle$ ABC: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$ (1)

Dans le $\triangle$ DCB: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$ (2)

De (1) , (2) on déduit que:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}$ (Propriété de commutativité).

$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})$ (Propriété d'associativité).

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{O}$ (Propriété de l'opposé).

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ (Propriété de l'élément neutre).

Essaie de résoudre

2 ABCD est un quadrilatère tel que $\overrightarrow{BC}=3\,\overrightarrow{AD}$. prouver que :

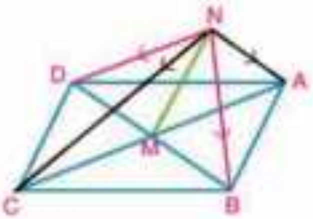
A ABCD est un trapèze. **B** $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=4\,\overrightarrow{AD}$.

Exemple

3 ABCD est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en M . N est un point du même plan. Prouver que :

A $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2\,\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{O}$ **B** $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}$

Solution



A $\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (1) règle du parallélogramme.

$2\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA}$ (2) (CM = MA).

par l'addition de (1) , (2), on déduit que

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$\because \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{O}$ $\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{0}$

B Trace $\overline{NM}$

Dans le $\triangle$ NAC: $\because$ M est le milieu de $\overline{AC}$ $\therefore \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = 2\,\overrightarrow{NM}$ (3).

Dans le $\triangle$ NBD: $\because$ M est le milieu de $\overline{BD}$ $\therefore \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND} = 2\,\overrightarrow{NM}$ (4).

Par l'addition (3) , (4) On déduit que: $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{ND}$.

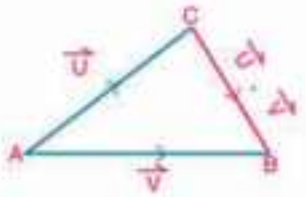
Essaie de résoudre

3 ABCD est un parallélogramme. E est le milieu de $\overline{CB}$. Prouver que:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = 2\,\overrightarrow{AE}$

Deuxièmement : Soustraction des vecteurs géométriquement

Dans le $\triangle$ ABC de la figure ci-contre:



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC})$ (définition de la soustraction).

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ (l'opposé).

$= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ (la commutativité).

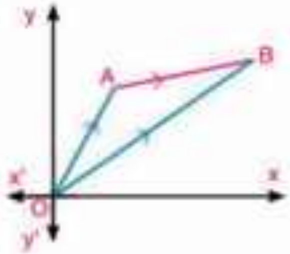
$= \overrightarrow{CB}$ (règle du triangle).

ainsi $\boxed{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}}$

si $\overrightarrow{AB}$ représente le vecteur $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{AC}$ représente le vecteur $\overrightarrow{V}$

alors: $\overrightarrow{CB}$ représente $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$. $\overrightarrow{BC}$ représente $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$

Exprimentation d'un segment orienté $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs de positions de ses extrémités :



si A (x_1, y_1) , B (x_2, y_2).

alors: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ (de la règle de la soustraction).

tel que $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont les vecteurs de positions des deux points B et A respectivement.

$\therefore$ $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}}$

Par exemple: Si A (7; -1) et B (2; 5), alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A} = (2; 5) - (7; -1) = (-5; 6)$

Exemple

④ ABCD est un parallélogramme tel que A(2; -1) , B (7; 1) et C (4; 4). Trouver les coordonnées du point D.

Solution

$\because \overline{AD} \parallel \overline{CB}$, $AD = BC$ $\qquad \therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{D} - \overrightarrow{A} = \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$ $\qquad \therefore D = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{C} - \overrightarrow{B}$

d'où $\overrightarrow{D} = (2; -1) + (4; 4) - (7; 1) = (-1; 2)$ $\therefore$ les coordonnées du point D sont $(-1; 2)$

Essaie de résoudre

④ ABCD est un quadrilatère tel que A(-1; -2), B (9; 0), C(8; 4) et D (0; 2).

prouver que: **A** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. **B** $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$.

Exemple

⑤ Si $3\overrightarrow{N} - 2\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{AB}$, prouver que $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{CA}$.

Solution

$3\overrightarrow{N} = 3\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AB}$ (Addition de 2 $\overrightarrow{AB}$ aux deux membres).

$3\overrightarrow{N} = 3\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{BA} - 2\overrightarrow{BA}$ (Opposé des vecteurs).

$3\overrightarrow{N} = 3\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{BA}$ (La soustraction).

$3\overrightarrow{N} = 3(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = 3\overrightarrow{CA}$ $\qquad \therefore \overrightarrow{N} = \overrightarrow{CA}$.

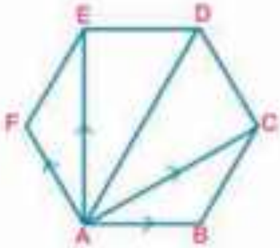
Essaie de résoudre

⑤ Si $2\overrightarrow{M} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{BA}$, prouver que $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{CA}$.

Test de compréhension

Dans la figure ci-contre: ABCDEF est un hexagone régulier , prouver que :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AD}$.



3 - 4 Applications sur les vecteurs

Apprendre

- L'utilisation les vecteurs et leurs opérations pour prouver quelques théorèmes géométriques.
- Résoudre des applications géométriques dans la géométrie plane en utilisant les vecteurs.
- Résoudre des applications physiques sur les vecteurs pour trouver:
  La résultante de plusieurs forces.
  Équilibet des forces.
  La vitesse relative

Expression de base

- Force résultante
- Équilibre des forces
- Vitesse relative

Premièrement: Applications géométriques

Réfléchis et discute

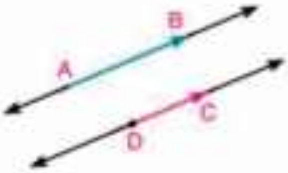
Dans le quadrilatère ABCD:

1- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, qui est ce que tu déduis?

2- Si $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$, quelle est la relation entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$?

Remarque que: **Si:** $\overrightarrow{AB} = K\,\overrightarrow{DC}$, $K \neq 0$

alors: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

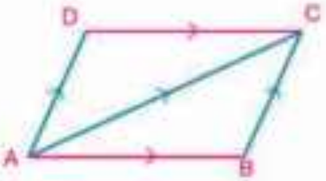


Par suite, il est possible d'utiliser les vecteurs et leurs opérations, pour prouver quelques théorèmes et des relations géométriques comme ce qui suit:

Exemple

1 En utilisait les vecteurs, prouve que : Si deux côtés opposés dans un quadrilatère ont même longueur et sont parallèles, alors la figure est un parallélogramme.

Solution



Hypothèses : Dans la figure ABCD:

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, $AB = DC$

Conclusions. $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Démonstration : Trace $\overline{AC}$

$\because AB = DC$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Dans le $\triangle$ ABC: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (définition de l'addition).

Dans le $\triangle$ ADC: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ (définition de l'addition).

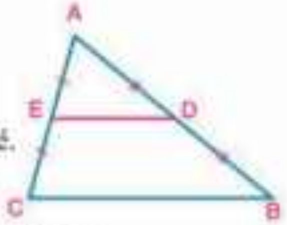
$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et par suite $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\therefore$ La figure ABCD est un parallélogramme.

Exemple

② En utilisant les vecteurs , prouve que le segment qui joint les milieux des deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.



Solution

Hypothèses : Dans le $\triangle$ ABC: D est le milieu de $\overline{AB}$ et E est le milieu de $\overline{AC}$

Conclusion : $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

Démonstration : $\because$ D est le milieu de $\overline{AB}$ $\quad\therefore AD = \frac{1}{2} AB$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\because$ E est le milieu de $\overline{AC}$ $\quad\therefore AE = \frac{1}{2} AC$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Dans le $\triangle$ ABC: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ (définition de l'addition). (1)

Dans le $\triangle$ ADE: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ (définition de l'addition).

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$. (2)

De (1) et (2) On déduit que

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ $\quad\therefore \overline{DE} \parallel \overline{CB}$ $\quad$ C'est ce qui est demandé

Remarque que $\|\overrightarrow{DE}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BC}\|$ $\quad$ alors la longueur de $\overline{DE} = \frac{1}{2}$ la longueur de $\overline{BC}$

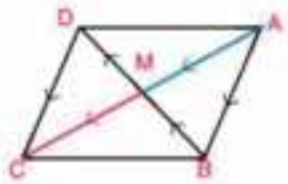
Essaie de résoudre

① ABCD est un quadrilatère. X, Y, Z , L sont les milieux des côtés $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ et $\overline{DA}$ respectivement. En utilisant les vecteurs , prouver que:
XYZL est un parallélogramme.

Exemple

③ En utilisant les vecteurs , prouve que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux.

Solution



Démonstration : supposant que M est le milieu de $\overline{BD}$

$\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$ $\quad$ trace les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$:

Dans le $\triangle$ ABM: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (définition de l'addition).

Dans le $\triangle$ CDM: $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}$ (définition de l'addition).

$\because \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$ construction , $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (du parallélogramme).

$\therefore \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$

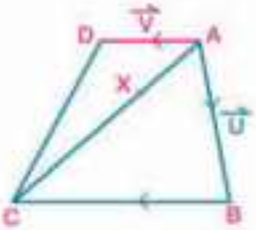
et puisque $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MC}$ ont même sens et ont un point M commun

$\therefore$ chacun d'eau est situé sur une même droite c'est à dire. A , M , C sont alignés

$\because \|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$ $\quad\therefore$ M est le milieu de $\overline{AC}$,M est le milieu de $\overline{BD}$ "construction".

$\therefore$ les deux diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ se coupent en leurs milieux (C.Q.F.D).

Essaie de résoudre



② **Dans la figure ci-contre,** ABCD est un trapèze, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$,

$AD = \frac{1}{2} BC$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{U}$

A Exprime en fonction de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ chacun de:

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$

B Si $X \in \overline{AC}$ tel que $AX = \frac{1}{3} AC$. prouve que les points D, X , B sont alignés.

Exemple

④ En utilisant les vecteurs , prouve que les points A (1; 4), B(-1; -2), et C(2; -3) sont les sommets d'un triangle rectangle en B.

Solution

Dans le triangle A B C:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$

$= (-1; -2) - (1; 4) = (-2; -6)$ $\quad$ $= (-1; -2) - (2; -3) = (-3; 1)$

$\because (-2) \times (-3) + (-6) \times 1 = 0$ $\quad$ $\therefore \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CB}$, $\quad m(\angle B) = 90^\circ$

$\therefore$ Le triangle ABC est rectangle en B.

Essaie de résoudre

③ En utilisant les vecteurs , prouve que les points A (3; 4), B(1; -1), C(-4; -3) et D(-2; 2) sont les sommets d'un losange.

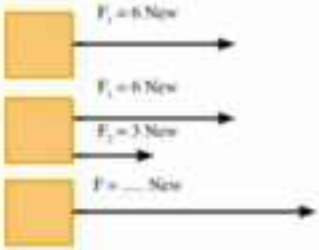
Test de compréhension

ABCD est un carré , si A(8; 2), B(3; -1) et C(0; 4), trouve , en utilisant les vecteurs, les coordonnées du point D et l'aire du carré

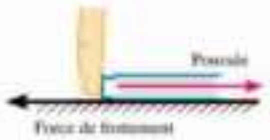
Deuxièmement : Applications physiques

Activité (1)

1- Si une force de 6 Newton agit dans la direction de l'Est sur un cube en bois et on choisit que chaque 3 Newton est représenté sur le dessin par un segment orienté de 1 cm. Quelle est la longueur de ce vecteur qui représente cette force? Si une force supplémentaire de 3 Newton agit dans la direction de l'Est sur le cube , quelle est la valeur de la force qui agit sur le corps à ce moment? Quelle est la longueur du segment orienté qui représente cette force sur le dessin?



2- Si tu essaye de faire bouger un livre sur la surface d'une table horizontale rugueuse, tu pourras sentir une résistance de la surface de la table contre, le mouvement du livre. Cette force de résistance est nommée force de frottement. Si le livre bouge sur la surface de la table, laquelle des deux forces est plus grande, la force qui agit pour faire bouger le livre ou la force de frottement.



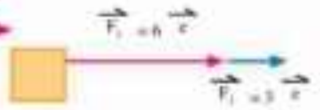
La force résultante:

Les forces qui agissent sur un corps suivent l'opération de l'addition des vecteurs. Le résultat de cette opération est connu par la résultante des forces F (ou la force résultante) qui agissent sur le corps telles que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + ...$

Pour trouver la résultante des forces agissantes sur un cube de bois:

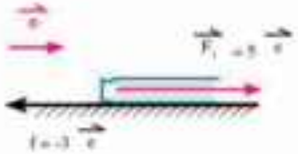
(1) En considérant $\overrightarrow{e}$ vecteur unitaire dans la direction de l'Est:, $\xrightarrow{\overrightarrow{e}}$

ainsi $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 6\,\overrightarrow{e} + 3\,\overrightarrow{e} = 9\,\overrightarrow{e}$



C'est- à dire que F = 9 newton et agit dans la direction de l'Est.

(2) Pour trouver la résultante des forces qui agissent sur le livre en essayant de faire le bouger par une force de $\overrightarrow{F_1}$ d'intensité 5 Newton. contre une force de frottement de 3 Newton. Considère $\overrightarrow{e}$ le vecteur unitaire dans la direction du mouvement du livre.



$\therefore$ Force de poussée: $\overrightarrow{F_1} = 5\,\overrightarrow{e}$

Force de frottement: $\overrightarrow{F} = -3\,\overrightarrow{e}$

ainsi $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = 5\,\overrightarrow{e} - 3\,\overrightarrow{e} = 2\,\overrightarrow{e}$

C'est a dire: F = 2 newton et agit dans la direction du mouvement du livre.

Les unités de force Dynes - Newton - Gramme poids (gp) Kilogramme poids (Kgp).

Essaie de résoudre

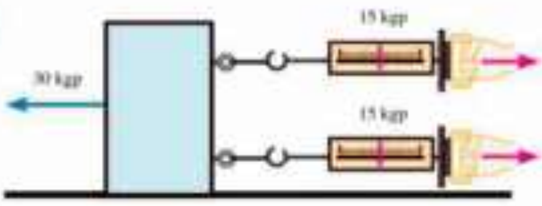
4 Trouver la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ agissantes dans chacun des cas suivants:

A

B

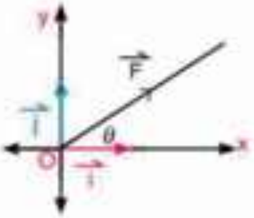
C

D



3- Si les forces: $\overrightarrow{F_1} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{i} + 7\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{i} - 5\,\overrightarrow{j}$ agissent en un point matériel, calculer l'intensité et la direction la résultante de ces forces (les forces sont mesurées en Newton).

Solution



$\because$ Résultante des forces $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$

$\therefore \overrightarrow{F} = (2 + 1 + 1)\,\overrightarrow{i} + (1 + 7 - 5)\,\overrightarrow{j}$

$= 4\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$

l'intensité de la résultante $= \| \overrightarrow{F} \| = \sqrt{(4)^2 + (3)^2} = 5$ Newtons.

Direction de la résultante: $\theta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 37^\circ$.

Essaie de résoudre

(5) Les forces $\overrightarrow{F_1} = 2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_2} = a\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{F_3} = 5\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$ agissent en un point matériel. Trouver les valeurs de a, b si la résultante de ces forces $\overrightarrow{F}$:

A $\overrightarrow{F} = 5\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$.

B $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

Réfléchis: Que veut - dire que la résultante de plusieurs forces concourantes en un point $= \overrightarrow{0}$?

Activité (2)

La vitesse relative

Pendant que tu assis dans une voiture mobile (A) et tu remarques la vitesse d'une autre voiture (B) mouvant dans la même direction que la voiture (A). Tu sentiras que la vitesse de la voiture (B) est inférieure a sa vitesse originale. Mais la voiture (B) se déplace dans le sens contraire que celui de la voiture (A), tu sentiras que la vitesse de la voiture (B) est supérieure à sa vitesse originale.

Remarque que:

La vitesse relative d'un corps (B) par rapport à un autre corps (A) prend le symbole $\overrightarrow{V_{BA}}$, c'est la vitesse qui parait avec laquelle le corps (B) se déplace. Si on considère que le corps (A) est en état de repos. Si $\overrightarrow{V_A}$ est la vitesse réelle de la voiture A et $\overrightarrow{V_B}$ est la vitesse réelle de la voiture B.

alors: $\boxed{\overrightarrow{V_{BA}} = \overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}}$

Réfléchis: Que veut dire $\overrightarrow{V_{AB}}$?

Exemple

5 Une voiture (A) se déplace sur une route droite à la vitesse de 70 km/h et la voiture (B) se déplace sur la même route à la vitesse de 90 km/h. Trouver la vitesse de la voiture (A) par rapport à (B) quand :

A les deux voitures se déplacent dans le même sens.

B les deux voitures se déplacent dans les sens contraires.

Solution

En considérant $\overrightarrow{e}$ le vecteur unitaire dans le même sens que la vitesse de la voiture A

A Les deux voitures se déplacent dans le même sens:

$\overrightarrow{V_A} = 70\ \overrightarrow{e}$

$\overrightarrow{V_B} = 90\ \overrightarrow{e}$

$\overrightarrow{V_{AB}} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$

$= 70\ \overrightarrow{e} - 90\ \overrightarrow{e} = -20\ \overrightarrow{e}$

c'est- à- dire que le passager de la voiture (B) ressent que la voiture (A) se déplace vers lui à la vitesse de 20 km/h.

B Les deux voitures se déplacent dans les sens contraires:

$\overrightarrow{V_A} = 70\ \overrightarrow{e}$

$\overrightarrow{V_B} = -\ 90\ \overrightarrow{e}$

$\overrightarrow{V_{AB}} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$

$= 70\ \overrightarrow{e} - (-\ 90\ \overrightarrow{e}) = 160\ \overrightarrow{e}$

C'est- à- dire que le passager de la voiture (B) ressent que la voiture (A) se déplace vers lui à la vitesse de 160 km/h.

Essaie de résoudre

6 Une voiture se déplace sur une route droite à la vitesse de 60 km/h. Si une motocyclette se déplace à la vitesse de 40 km/h sur la même route. Trouver la vitesse de la motocyclette par rapport à la voiture quand elles se déplacent dans le même sens

Résumé de l'unité

- **Quantités scalaires:** Ce sont des quantités définies complètement en connaissant leurs intensités seulement comme la longueur, l'aire et la densité.

- **Quantités vectorielles:** Ce sont des quantités définies complètement en connaissant leurs intensités et leurs directions comme le déplacement, la vitesse et la force.

- **Segment orienté:** C'est un segment orienté qui a un point d'origine, un point final, un sens.

- Norme d'un segment orienté $\overrightarrow{AB}$ est la longueur de $\overline{AB}$ et noté par le symbole $\|\overrightarrow{AB}\|$.

- Deux segments orientés sont équivalents, s'ils ont même norme et même sens.

- **Vecteur de position:** C'est le vecteur de position d'un point connu par rapport au point d'origine, c'est le segment orienté qui commence par le point d'origine et se termine par le point connu.

- **Norme d'un vecteur:** C'est la longueur du segment qui représente le vecteur.

- **Forme polaire du vecteur de position $\overrightarrow{r}$:** $\overrightarrow{r} = (\|\overrightarrow{r}\|, \theta)$ tel que θ, c'est la mesure de l'angle que fait le vecteur avec une direction fixe.

- **Vecteur nul** prend le symbole $\overrightarrow{O}$ ou $(\overrightarrow{0})$: $\overrightarrow{O} = (0, 0)$, est défini par le vecteur nul: tel que $\|\overrightarrow{O}\| = \|\overrightarrow{0}\| = 0$ et zéro n'a pas de sens.

- **Vecteurs:** Ce sont les éléments de l'ensemble R^2 avec les opérations de l'addition et la multiplication par un nombre réel.

- **Propriétés de l'opération** de l'addition des vecteurs: stable - commutative - associative, $\overrightarrow{O}$ élément neutre - pour chaque $\overrightarrow{A} \in R^2$, il existe $-\overrightarrow{A} \in R^2$.

- **Propriétés de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel :**

  Propriété de la distributivité :

  Pour chaque $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B} \in R^2$, $K \in R$ **on a:** $K(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) = K\overrightarrow{A} + K\overrightarrow{B}$

  Pour chaque $\overrightarrow{A} \in R^2$, $K_1, K_2 \in R$ **on a:** $(K_1 + K_2)\overrightarrow{A} = K_1\overrightarrow{A} + K_2\overrightarrow{A}$

  Propriétés de l'associativité $\overrightarrow{A} \in R^2$, $K_1, K_2 \in R$ **on a:** $(K_1 K_2)\overrightarrow{A} = K_1(K_2\overrightarrow{A})$

  Propriétés de la simplification

  Pour chaque $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B} \in R^2$, $K \in R$, si $K\overrightarrow{A} = K\overrightarrow{B}$, **alors** $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ et vice versa.

- **Vecteur unitaire** C'est un vecteur de norme l'unité

- **Vecteur unitaire de base** $\overrightarrow{i}$ est le segment orienté qui commence par le point d'origine, de norme l'unité et sa direction est la direction positive de l'axe des abscisses et s'écrit $\overrightarrow{i} = (1, 0)$

- **Vecteur unitaire de base** $\overrightarrow{j}$ est le segment orienté qui commence par le point d'origine, de norme l'unité et sa direction est la direction positive de l'axe des ordonnées et s'écrit $\overrightarrow{j} = (0, 1)$

- **Exprimentation d'un vecteur en fonction des deux vecteurs de base** si $\overrightarrow{A} = (a_1, a_2)$

  alors $\overrightarrow{A} = a_1\overrightarrow{i} + a_2\overrightarrow{j}$.

Résumé de l'unité

- **Vecteurs parallèles:** Nous disons que $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{N}$ sont parallèles si n'importe quel segment orienté , représenté l'un deux est parallèle à n'importe quel segment orienté représenté par l'autre ou sont contenu dans la même droite.

- **Vecteurs orthogonaux** Nous disons que $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{N}$ sont perpendiculaires si la droite qui porte le segment orienté représenté par l'un deux est perpendiculaire à la droite qui porte un segment orienté représenté par l'autre.

- **Conditions du cas de parallélisme et perpendicularisme:** si $\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{N}$ sont deux vecteurs non - nuls tels que $\overrightarrow{M} = (x_1, y_1)$, $\overrightarrow{N} = (x_2, y_2)$

  (1) $\overrightarrow{M} \parallel \overrightarrow{N}$ si: $x_1\, y_2 - x_2\, y_1 = 0$ et vice versa.

  (2) $\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{N}$ si: $x_1\, x_2 + y_1\, y_2 = 0$ et vice versa.

Il est possible de multiplier un vecteur par un nombre réel si $\overrightarrow{M} = (x_1, y_1)$, $K \in R$

alors $K\,\overrightarrow{M} = K\,(x_1\,,\, y_1) = (K\,x_1\,,\, K\,y_1)$

et si $K \neq 0$, $\overrightarrow{M}$ est un vecteur non-nul ainsi $\overrightarrow{M} \parallel K\,\overrightarrow{M}$

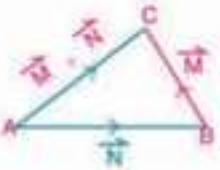
le sens de $K\,\overrightarrow{M}$ est la même que $\overrightarrow{M}$ pour chaque $K > 0$

le sens de $K\,\overrightarrow{M}$ est sens contraire de $\overrightarrow{M}$ pour chaque $K < 0$

- **Addition des vecteurs géométriquement**

Règle du triangle

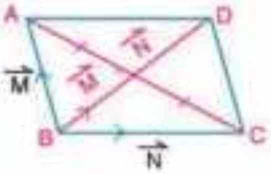
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Règle du parallélogramme

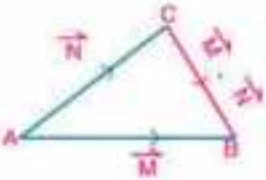
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$

$= 2\ \overrightarrow{BE}$



- **Soustraction des vecteurs géométriquement:**

  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$



- L'exprimentation de $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs de positions pour leurs extrémités.

  Si $A(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$, alors: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B} - \overrightarrow{A}$

- **Applications sur les vecteurs**

  (1) Applications géométriques (pour prouver les théorèmes et résoudre les problèmes vitaux)

  (2) Applications physiques (activités)

Géométrie Analytique

Unité 4

Droite

Objectifs de l'unit

A la fin du chapitre , l'élève doit être capable de:

- Trouver les coordonnées du point de partage d'un segment intérieurement ou extérieurement en connaissant le taux de division.
- Trouver le rapport de partage d'un segment de l'intérieur ou de l'extérieur, en connaissant les coordonnées du point de partage.
- Les différentes formes de l'équation d'une droite.
- Trouver l'équation vectorielle , paramétrique , cartésienne de l'équation d'une droite
- Trouver le forme générale de l'équation d'une droite.
- Trouver l'équation de la droite en fonction des partes interceptées sur les deux axes.
- L'angle de deux droites
- Distance d'un point à une droite
- Équation générale d'une droite passant par le point d'intersection de deux droites données.

Expressions de base:

- Point du partage
- Vecteur position d'une droite
- Equation vectorielle
- Équation Paramétrique
- Équation cartésienne
- Équation générale
- angle entre deux droites
- Longueur d'une perpendiculaire

Leçons de l'unité

Leçon (4 - 1) : Partage d'un segment.

Leçon (4 - 2) : Équation d'une droite.

Leçon (4 - 3) : la mesure de l'angle de deux droites.

Leçon (4 - 4) : Longueur de la colonne perpendiculaire d'un point à une droite.

Leçon (4 - 5) : Equation générale d'une droite passant par le point d'intersection de deux droites données

Matériels utilisés

Calculatrice scientifique - ordinateur - programmes graphiques

Historique

La géométrie analytique est l'une des branches essentielles pour les mathématiques car elle est d'une grande importance pour la plupart des sciences mathématiques des applications physiques et les sciences technologiques.

Elle a aidé à l'étude de l'espace et ses propriétés géométriques dans la 1ére moderne.

Elle est en lien à tout ce qui est nouveau car elle est considérée la base de l'interprétation des photos dans la science de l'ordinateur.

La géométrie analytique est l'entrée pour l'étude de la géométrie différentielle (géométrie du mouvement) et la géométrie algébrique, car la géométrique différentielle se spécialise à l'étude des formes géométriques surtout les courbes et les surfaces en ce qui concerne les propriétés géométriques et ceci en appliquant le calcul intégral.

Le savants ont inventés le système des coordonnées qui est formé de deux axes perpendiculaires et intersections (axe des abscisses et l'axe des ordonnés), au moyen duquel il est possible d'exprimer chaque point dans le niveau par deux nombres réels (x, y)

En utilisant le système des coordonnées, il a été possible de prouver la justesse des propriétés de la géométrie d'Euclide en exprimant les droites et les courbes par des équations algébriques en les considérants des trajectoires pour des points généraux qui se déplacent avec des conditions qui organisent la relation entre (x,y).

La géométrie analytique a facilité plusieurs traitements dans les différentes branches de mathématiques.

Elle a été l'un des facteurs de son évolution et le traitement entre eux

Organigramme de l'unité

4 - 1 Partage d'un segment

Apprendre

- Le partage intérieur.
- le partage extérieur.
- le rapport du partage .

Expressions de base

- Partage intérieur
- Partage extérieur
- Rapport du partage

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié comment trouver les coordonnées du milieu d'un segment. Est - ce que tu peux trouver les coordonnées du point de partage d'un segment intérieurement ou extérieurement si on connait le rapport du partage ?

Premièrement: Trouver les coordonnées d'un point qui partage le segment dans un rapport déterminé:

1- intérieurement

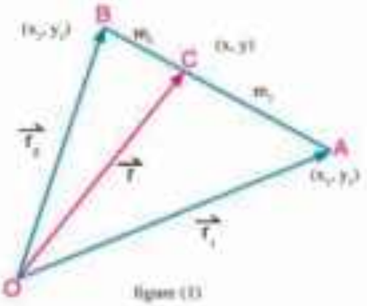


figure (1)

Si $C \in \overline{AB}$, alors C partage $\overline{AB}$ intérieurement dans le rapport de $m_2 : m_1$

Tel que $\frac{m_2}{m_1} > 0$ alors $\frac{AC}{CB} = \frac{m_2}{m_1}$

et les deux segments orientés $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ ayant même sens. C'est -à - dire: $m_1 \times \overrightarrow{AC} = m_2 \times \overrightarrow{CB}$

on suppose que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ et $C(x, y)$,

alors $\vec{r_1}$, $\vec{r_2}$, $\vec{r}$ sont des vecteurs représentés par les segments orientés $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ respectivement, tel que O est le point d'origine dans un système orthogonal.

En utilisant la soustraction des vecteurs:

$m_1 (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) = m_2 (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC})$

$$m_1 (\vec{r} - \vec{r_1}) = m_2 (\vec{r_2} - \vec{r})$$

par distribution $$m_1 \vec{r} - m_1 \vec{r_1} = m_2 \vec{r_2} - m_2 \vec{r}$$

$$m_1 \vec{r} + m_2 \vec{r} = m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}$$

ainsi $$\vec{r} (m_1 + m_2) = m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}$$

alors: $$\boxed{\vec{r} = \frac{m_1 \vec{r_1} + m_2 \vec{r_2}}{m_1 + m_2}}$$ **c'est la forme vectorielle**

Exemple

1) Si A (2; – 1) et B (– 3; 4), trouver les coordonnées du point C qui partage $\overrightarrow{AB}$ intérieurement dans le rapport de 3 : 2, par la forme vectorielle.

Solution

on suppose que C (x; y)

$\because A\,(2; -1) \qquad \therefore \overrightarrow{r_1} = (2; -1) \qquad , \qquad \because B\,(-3; 4) \qquad \therefore \overrightarrow{r_2} = (-3; 4)$

$m_2 : m_1 = 3 : 2$

$$\because \overrightarrow{r} = \frac{m_1\,\overrightarrow{r_1} + m_2\,\overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \overrightarrow{r} = \frac{2(2, -1) + 3(-3, 4)}{2 + 3} = \frac{(4, -2) + (-9, 12)}{5} = \frac{(-5, 10)}{5} = (-1; 2)$$

$\therefore$ Les coordonnées du point C sont (-1; 2)

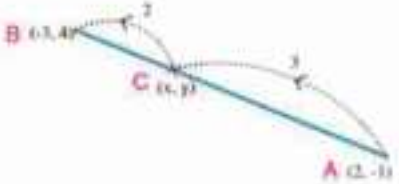
La forme cartésienne :

$$(x, y) = \frac{m_1(x_1, y_1) + m_2(x_2, y_2)}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 x_1 + m_2 x_2, m_1 y_1 + m_2 y_2)}{m_1 + m_2}$$

alors: $$\boxed{(x\,;\,y) = \left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}\,;\,\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right)}$$

Exemple

2) Résoudre l'exemple précédent par la forme cartésienne.



la Solution

$$(x; y) = \left(\frac{2 \times 2 + 3 \times -3}{2 + 3}\,;\,\frac{2 \times -1 + 3 \times 4}{2 + 3}\right) = (-1; 2)$$

Essaye de résoudre

1) Si A (4; 2) et B (8; –6), trouver les coordonnées du point C qui partage $\overrightarrow{BA}$ intérieurement dans le rapport de 1 : 3

2- Partage de l'extérieur

Si C ∈ $\overleftrightarrow{AB}$,C ∉ $\overline{BA}$, alors C partage $\overrightarrow{AB}$ extérieurement dans le rapport de $m_2 : m_1$ tel que $\frac{m_2}{m_1} < 0$ et par suite l'une des deux valeurs m_1 ou m_2 est positive et l'autre est négative :

C ∈ $\overrightarrow{BA}$, C ∉ $\overline{AB}$

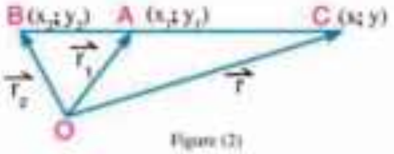


Figure (2)

C ∈ $\overrightarrow{AB}$,C ∉ $\overline{AB}$

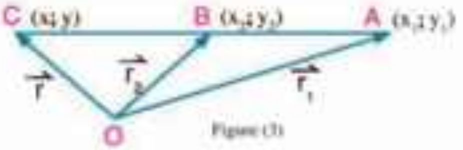
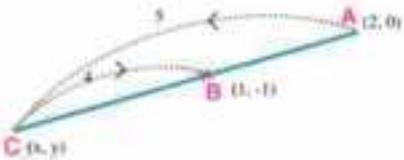


Figure (3)

Exemple

3 Si A (2; 0) et B (1; -1), trouver les coordonnées du point C qui partage $\overrightarrow{AB}$ extérieurement dans le rapport de 5 : 4.



la Solution

$\because \overrightarrow{r_1} = (2; 0),\ \overrightarrow{r_2} = (1; -1)$

$,\ m_2 : m_1 = 5 : -4\ \dfrac{m_2}{m_1} < 0$ négative — par substitution

$,\ \overrightarrow{r} = \dfrac{m_1\ \overrightarrow{r_1} + m_2\ \overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$ — formule mathématique de la loi

$\therefore \overrightarrow{r} = \dfrac{-4(2; 0) + 5\ (1; -1)}{-4 + 5}$ — par distribution

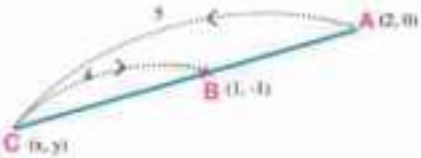
$\overrightarrow{r} = (-8 + 5; 0 - 5) = (-3; -5)$ — par addition et simplification

$\therefore$ Les coordonnées du point C est $(-3; -5)$

La forme cartésienne:

$(x, y) = \left(\dfrac{-4 \times 2 + 5 \times 1}{-4 + 5}, \dfrac{-4 \times 0 + 5 \times -1}{-4 + 5}\right)$

$= (-3; -5)$

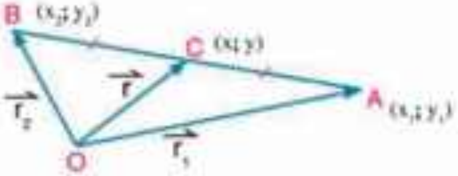


Remarque que:

Si C est le milieu de $\overrightarrow{AB}$ tel que A $(x_1; y_1)$, B$(x_2; y_2)$
et: $m_1 = m_2 =$ (m par exemple), ainsi

$\overrightarrow{r} = \dfrac{\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2}}{2}$ **La forme vectorielle**

$(x, y) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$ **La forme cartésienne**



Essaie de résoudre

2 Si C (2; 4) est le milieu de $\overrightarrow{AB}$ tel que A (x; 4) et B (1; y), trouver x et y

Deuxièmement : Trouver le rapport de partage

Si le point C partage $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport de $m_2 : m_1$ et si:

1- le rapport $\dfrac{m_2}{m_1} > 0$, alors le partage est intérieur .

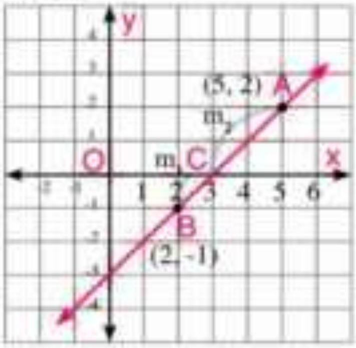
2- la rapport $\dfrac{m_2}{m_1} < 0$ alors le partage est extérieur.

Exemple

4 Si A (5; 2) et B (2; -1) , trouver le rapport dont le segment $\overline{AB}$ est partagé par les points d'intersection de $\overleftrightarrow{AB}$ avec les deux axes, montrant le genre de partage dans chaque cas puis trouver les coordonnées des points de partage.

la Solution

premièrement : supposons que l'axe x coupe $\overrightarrow{AB}$ au point C (x, 0)



tel que $\frac{AC}{CB} = \frac{m_2}{m_1}$ alors: $y = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$

$\therefore 0 = \frac{m_1 (2) + m_2 (-1)}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$

$\therefore 2m_1 = m_2$ $\therefore \frac{m_2}{m_1} = \frac{2}{1}$ (rapport de partage)

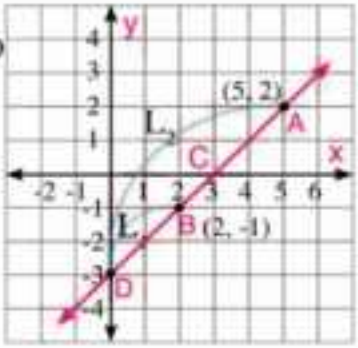
$\because \frac{m_2}{m_1} > 0$

∴ La partage est intérieur dans le rapport de 2 : 1

∴ Coordonnées de C $\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, 0\right) = \left(\frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1 + 2}, 0\right)$

ainsi les coordonnées du point C sont = (3; 0)

Deuxièmement: La droite coupe l'axe des coordonnés en D



supposons que les coordonnées de D sont (0; y)

tel que $\frac{AD}{DB} = \frac{m_2}{m_1}$ alors $x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$\therefore 0 = \frac{m_1 \times 5 + m_2 \times 2}{m_1 + m_2}$

$\therefore 2\,m_2 = -5m_1$ $\therefore \frac{m_2}{m_1} = -\frac{5}{2}$ (rapport de partage)

$\because \frac{m_2}{m_1} < 0$

∴ La partage est extérieur dans le rapport 5 : 2

Les coordonnées du point D sont (0; y) $= \left(0 ; \frac{-2 \times 2 + 5 \times -1}{-2 + 5}\right)$

∴ ainsi les coordonnées du point D sont (0; –3)

Réfléchis: Dans l'exemple précédent, utilise la méthode vectorielle pour trouver le rapport qui partage $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe des coordonnées, puis trouver les coordonnées du point de partage.

Essaye de résoudre

3) Si A (– 4; 3), B (8; 6) et C ∈ $\overleftrightarrow{AB}$ tel que C (x, 0), trouver le rapport du partage de $\overrightarrow{AB}$ par le point C en montrant la nature du partage, puis trouver la valeur de x.

Test de compréhension

1) Si A (0; – 3) et B (3; 6), trouver les coordonnées du point C qui partage $\overrightarrow{BA}$ intérieurement dans le rapport de 1 : 2

2) **Lien à la distance:** Une voiture se déplace de la ville A à la ville B telles que A (5; – 6)et B (– 1; 0), pendant le mouvement de la voiture s'arrête deux fois. Trouver les coordonnées des 2 points si la voiture

A s'arrête au milieu de la route.

B s'arrête au deux tiers de la route du côté du point A

4 - 2 Équation de la droite

Apprendre

- Trouver l'équation de la droite, en fonction d'un point connu et son vecteur .
- Trouver la forme générale de l'équation de la droite.
- Trouver de l'équation de la droite, en fonction des deux parties interceptées des deux axes.

Expressions de base

- Vecteur direction d'une droite
- Équation vectorielle
- Équation paramétrique
- Équation Cartésienne
- Équation générale

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié l'équation générale d'une droite :
$ax + by + c = 0$ telle que $a, b \neq 0$ et tu la représenté graphiquement par une ligne droite.

Déterminer laquelle des relations suivantes représente une droite.

A $3x - 2y = 5$ **B** $y = \sqrt{x} + 1$ **C** $y = 3$

D $x - \sqrt{2} = 0$ **E** $y + \frac{1}{x} = 2$ **F** $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$

Remarquez que $ax + by + c = 0$; tel que a, b n'égalent pas zéro ensemble, c'est la forme générale de l'équation d'une droite.

1- Si $b = 0$, $a \neq 0$ alors: $ax + c = 0$
$\therefore x = -\frac{c}{a}$ est une équation d'une droite parallèle à l'axe des y et passe par le point $(-\frac{c}{a}, 0)$

2- Si $a = 0$, $b \neq 0$ alors: $by + c = 0$
c'est à-dire: $y = -\frac{c}{b}$ est une équation d'une droite parallèle à l'axe des x et passe par le point $(0; -\frac{c}{b})$

3- Si $c = 0$ alors: $a x + b y = 0$
c'est une équation d'une droite passant par le point l'origine.

Essaye de résoudre

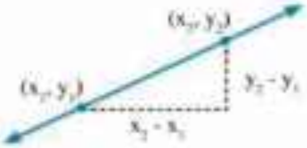
1 Laquelle des droites suivantes est parallèle à l'axe des ordonnées, ou laquelle est parallèle à l'axe des abscisses ou la quelle passe par le point d'origine, puis trouver les coordonnées des points d'intersections avec les axes (s'ils existent).

A $2x + 3 = 0$ **B** $x + 3y = 0$

C $2x + 3y = 12$ **D** $y - 5 = 0$

Réflexion critique : Si L est une droite , F est un point du plan F ∉ L. Combien de droites passant par F et sont parallèles à la droite L?

Pente d'une droite,



Tu as déjà étudié que les conditions nécessaires pour déterminer l'équation d'une droite, c'est la détermination d'un point et sa pente. Tu sais que la pente de la droite passant par les deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) égale à $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Remarque (1) **Si** $L_1 // L_2$, alors $m_1 = m_2$

C'est - à-dire que. Si deux droites sont parallèles, alors leurs pentes, sont égales et vice versa.

(2) **Si** $L_1 \perp L_2$, alors $p_1 \times p_2 = -1$

C'est - à-dire. que si deux droites sont perpendiculaires, alors le produit de leurs pentes $= -1$ et vice versa.

Essaye de résoudre

2 Trouvez la pente de la droite passant par chaque paire des points suivants et déterminer laquelle des droites sont parallèles et laquelle sont perpendiculaires.

A $(3; 1)$, $(-2; 5)$ **B** $(4; 0)$, $(2; -1)$

C $(7; -1)$, $(3; -3)$ **D** $(-5; -2)$, $(-1; 3)$

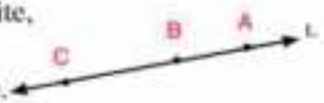
A apprendre

Vecteur directeur d'une droite

Définition **Chaque vecteur non nul peut être représenté par un segment orienté sur une droite est nommé vecteur de directeur de la droite L**

Si les points A, B, C $\in$ L, **alors** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ sont des vecteurs directeurs de la droite.

Exemple: Si $\overrightarrow{u} = (2; 1)$ est un vecteur directeur de l'une des droite,
alors les vecteurs $(4; 2)$, $(-2; -1)$, $(1; \frac{1}{2})$,...
sont des vecteurs directeurs de la même droite.



en générale Si $\overrightarrow{u} = (a, b)$ vecteur directeur de la droite,

alors K $\overrightarrow{u}$ tel que $K \in R - \{0\}$ est un vecteur directeur de la même droite. Pourquoi?

Essaye de résoudre

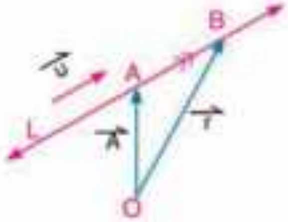
3 Si $\overrightarrow{u} = (2; -3)$ est un vecteur directeur d'une droite, laquelle de vecteurs suivants est le vecteur directeur de cette droite?

A $(-2; 3)$. **B** $(-2; -3)$.

C $(2; 3)$. **D** $(6; -9)$.

Équation d'une droite en fonction d'un point sur la droite et son vecteur directeur

Premièrement : La forme vectorielle



Pour déterminer l'équation de la droite passant par le point A et ayant $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur,

On suppose que B, point sur la droite L et.

$\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{A}$ sont les deux vecteurs représentés par les deux vecteurs orientés $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}$ respectivement, tels que O est un point du plan .

alors, on trouve un nombre $K \in R - \{0\}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{A} = K\,\overrightarrow{u}$

et par suite: $\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + K\,\overrightarrow{u}}$

Cette forme est nommée la forme vectorielle de la droite qui passe par le point A et ayant un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Exemple

1) Déterminer une équation vectorielle de la droite passant par le point (2; -3) et son vecteur directeur est (1; 2).

la Solution

La droite passe par le point A (2; -3) et son vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1; 2)$

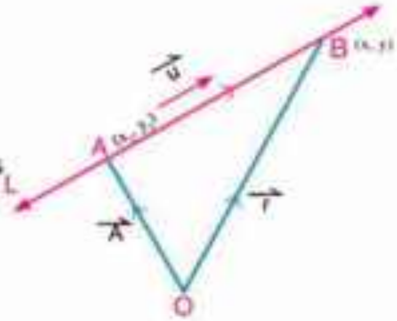
$\because\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + K\,\overrightarrow{u}$ la forme vectorielle.

$\therefore$ L'équation vectorielle de la droite est $\overrightarrow{r} = (2; -3) + K(1; 2)$.

Essaye de résoudre

4) Déterminer une équation vectorielle de la droite passant par le point (- 4; 3) et son vecteur directeur est (2; 5) .

Deuxièmement: Équations paramétriques



L'équation vectorielle de la droite est $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + K\,\overrightarrow{u}$

Si A (x_1, y_1) et B (x, y) par rapport à un système des coordonnés perpendiculaire et O est le point d'origine. $\overrightarrow{u} = (a, b)$

ainsi l'équation de la droite est $(x , y) = (x_1 , y_1) + K (a , b)$

ainsi: $\boxed{x = x_1 + k a \quad , \quad y = y_1 + kb}$

sont les deux équations paramétriques de la droite passant par le point (x_1, y_1) et le vecteur directeur $\overleftarrow{u} = (a, b)$ tel que. $K \in R - \{0\}$.

Exemple

2 Déterminer les deux équations paramétriques de la droite passant par le point (4; -3) et ayant comme vecteur directeur (2; 3).

Solution

Soit A (4; -3) ∈ à la droite L , $\overrightarrow{u} = (2; 3)$

∴ L'équation vectorielle de la droite L est (x, y) = (4;– 3) + K(2; 3) la forme vectorielle

les 2 équations paramétriques x = 4 + 2 K , y = -3 + 3 K les équations paramétriques

Essaye de résoudre

5 Déterminer les deux équations paramétriques de la droite passant par le point (0; 5) et ayant comme vecteur directeur (-1; 4).

Troisièmement : Équation cartésienne

En éliminant K des deux équations paramétriques : $x = x_1 + ka$, $y = y_1 + kb$

On obtient l'équation: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}$ c'est-à - dire: $\frac{b}{a} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

et si on place $\frac{b}{a} = p$ (tel que m est la pente de la droite), alors la forme cartésienne sera:

$p = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Exemple

3 Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point (3; -4) et son vecteur directeur (2; -1)

Solution

$m = \frac{-1}{2}$ La pente de la droite $p = \frac{b}{a}$

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ l'équation d'une droite dont on connait sa pente et un point sur elle.

$\frac{-1}{2} = \frac{y - (-4)}{x - 3}$ en substituant $p = \frac{-1}{2}, x_1 = 3, y_1 = -4$

$2y + 8 = - x + 3$ Le produit des extrêmes = le produit des moyennes.

$x + 2y + 5 = 0$ la forme générale.

Essaye de résoudre

6 Déterminer l'équation cartésienne de la droite qui passe par le point (3; -4) et qui forme un angle positif de mesure 45° avec le sens positif de l'axe des abscisses .

Réflexion critique : Déterminer les équations vectorielles et cartésiennes de la droite passant par le point (x_1, y_1) et pour vecteur direction $\overrightarrow{u} = (a, b)$ dans les cas suivantes:

A: si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées.

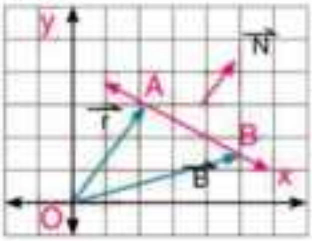
B: si la droite est parallèle à l'axe des abscisses.

C: si la droite passe par le point l'origine.

Le Vecteur direction de la droite qui passe par le point d'origine et par le point (x_1, y_1) est $\overrightarrow{u} = (x_1, y_1)$ et sa pente $\frac{y_1}{x_1}$

A apprendre

Vecteur directeur perpendiculaire à une droite,



Si $\overrightarrow{u} = (a, b)$ vecteur directeur d'une droite, **alors** n'importe quel vecteur de la famille K (b, -a) tel que $K \in R - \{0\}$ est un vecteur directeur perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u}$.

contrairement Si $\overrightarrow{N} = (a, b)$ perpendiculaire à une droite alors, les vecteurs K (b, -a) tel que $K \in R - \{0\}$ est un vecteur directeur de la droite.

Exemple: Si $\overrightarrow{u} = (3; 2)$ vecteur directeur d'une droite, alors le vecteur directeur perpendiculaire à elle est (-2; 3), (2; -3), (-4; 6), ...

Essaye de résoudre

7. Si $\overrightarrow{u} = (\frac{1}{2}; 1)$ est un vecteur directeur d'une droite, alors tous les vecteurs suivants sont perpendiculaires à cette droite sauf le vecteur:

A $(1; -\frac{1}{2})$ **B** $(2; -1)$ **C** $(-1; -\frac{1}{2})$ **D** $(4; -2)$

Exemple

4. Si la droite qui passe par le point A (- 3; 5) et le vecteur (- 1; 2) est perpendiculaire à la droite, déterminer :

A l'équation vectorielle de la droite. **B** l'équation cartésienne de la droite.

la Solution

A $\because$ La droite qui passe par le point A (-3; 5) est perpendiculaire au vecteur (1; 2)

$\therefore$ Le vecteur de directeur de la droite est $\overrightarrow{u} = (2; 1)$

$\because$ L'équation vectorielle de la droite est: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + K\overrightarrow{u}$

$\therefore \overrightarrow{r} = (-3; 5) + K(2; 1)$

B $\because$ L'équation cartésienne de la droite ayant "p" comme pente et passe par le point (x_1, y_1) est : $p = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{y - 5}{x + 3}$ $\therefore x + 3 = 2y - 10$

ainsi $x - 2y + 13 = 0$ est l'équation cartésienne de la droite .

Réfléchit: Trouver l'équation cartésienne de la même droite, précédente et ceci en éliminant k des deux équations paramétriques.

Essaye de résoudre

8. Si la droite passant par le point A (2 - 3) est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u} = (-1; 2)$, déterminer :

A l'équation vectorielle de la droite.

B les deux équations paramétriques de la droite.

C l'équation cartésienne de la droite.

A apprendre

Équation de la droite, en fonction des deux parties interceptées sur les deux axes

L'équation de la droite qui a une pente (p) et qui découpe l'axe y d'une longueur c est $y = px + c$

De la figure ci-contre,

On trouve que la pente qui passe par les deux points (a, 0), (0, b) est: $c = \frac{-b}{a}$ (pourquoi?)

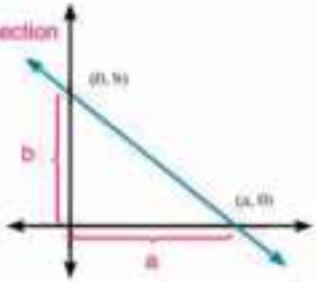
$\frac{y - y_1}{x - x_1} = p$ l'équation d'une droite en fonction de la pente et d'un point

$\frac{y - 0}{x - a} = -\frac{b}{a}$ par substitution des coordonnées des points d'intersection

$ay = -bx + ab$ produit des extrêmes = produit des moyens

$bx + ay = ab$ En divisant les deux membres par ab

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$



Exemple

5 Trouver la partie interceptée sur les deux axes par la droite d'équation

$3x + 4y - 12 = 0$

Solution

On mets l'équation sous la forme $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

$\therefore \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ (Pourquoi?)

$\therefore$ Les longueurs des deux parties interceptées par les deux axes x et y sont 4 et 3 respectivement.

Essaye de résoudre

9 Trouver les longueurs des parties interceptées par les deux axes par la droite d' équation: $5x - 3y = 15$

Test de compréhension

Trouve l'équation générale de la droite dans les cas suivants:

A de coure les deux axes aux points (3; 0), (0; − 4).

B Passe par le point (3.1) et parallèle à la droite d'équation $2x - 3y + 7 = 0$

C Passe par le point (0 − 1) et ayant comme vecteur directeur (2; −3)

4 - 3 Mesure de l'angle de deux droites

Apprendre

- Déterminer la mesure de l'angle entre deux droites.

Expressions de base

- Angle entre deux droites.

Matériel et moyens

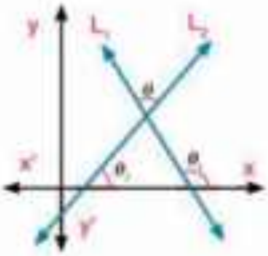
- calculatrice scientifique

A apprendre

Mesure de l'angle aigu de deux droites

Si θ est la mesure de l'angle aigu de deux droites L_1, L_2 et leurs pentes p_1, p_2 ainsi.

$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{p_1 - p_2}{1 + p_1 p_2}\right|$ tel que $p_1 p_2 \neq -1$



Exemple

1 Déterminer la mesure de l'angle aigu de deux droites suivantes:

$3x - 4y - 11 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$

la Solution

A Trouvons la pente de chacune des deux droites:

$p_1 = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$ pente de la 1ère droite

$p_2 = \frac{-1}{7}$ pente de la 2ème droite

$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{p_1 - p_2}{1 + p_1 p_2}\right|$ formule de la loi

$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{\frac{3}{4} - (-\frac{1}{7})}{1 + \frac{3}{4}(-\frac{1}{7})}\right|$ par substitution la valeur de m_1, m_2

$= \left|\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}}\right| = \left|\frac{\frac{21 + 4}{28}}{\frac{28 - 3}{28}}\right| = 1$

$\theta = 45°$

Rappelle- toi
La pente de la droite $ax + by + c = 0$ égale $\frac{-a}{b}$

Exprimentation orale:

Citer la relation entre les deux droites L_1, L_2 dans les cas suivants:

A si la tangente de l'angle entre elles égale zéro.

B si la tangente de l'angle entre elles est non définie.

C si p_1 est la pente de la première droite et p_2 est la pente de la deuxième, citer la relation entre p_1, p_2 dans A et B .

Essaye de résoudre

① Déterminer la mesure de l'angle aigu des deux droites dans les deux cas suivants:

A $\overrightarrow{r} = (0; -2) + K(3; -1)$, $\overrightarrow{r} = (0; 5) + K(1; 2)$.

B $x + 2y + 3 = 0$, $x - 3y + 1 = 0$ **C** $2y = 3$, $2x + y = 4$

Exemple

② Lien à la géométrie: ABC est un triangle dont A (0; 5), B (2; -1) et C (6; 3), prouver que le triangle est un triangle isocèle, puis trouver la mesure de l'angle A.

la Solution

Distance entre deux points $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Formule de la loi

$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (5-(-1))^2} = 2\sqrt{10}$

$AC = \sqrt{(0-6)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{10}$

$BC = \sqrt{(2-6)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$

Le triangle ABC est isocèle car $AB = AC$

On remarque que $(BC)^2 < (AB)^2 + (AC)^2$

donc $\angle A$ est aigu

$m_1 = \frac{5-(-1)}{0-2} = -3$ pente de $\overleftrightarrow{AB}$

$m_2 = \frac{5-3}{0-6} = -\frac{1}{3}$ pente de $\overleftrightarrow{AC}$

$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$ Formule de la loi

$\text{tg}\,A = \left|\frac{-3 - (-\frac{1}{3})}{1 + (-3)(-\frac{1}{3})}\right| = \frac{4}{3}$ En substitution les valeurs de m_1, m_2

$m(\angle A) = 53^\circ\, 7'\, 49''$ utilise la calculatrice

Remarque

En utilisant la formule de l'angle de deux droites pour trouver la mesure d'un angle à l'intérieur du triangle, il faut déterminer premièrement le genre de l'angle (aigu - droit - obtus)

Essaye de résoudre

② Dans l'exemple précédent, trouve l'aire du triangle ABC en rapprochant au résultat deux décimales près .

Test de compréhension

① Déterminer la mesure de l'angle aigu de deux droites $\overrightarrow{r} = (2; 0) + K(-2; 1)$, $\overrightarrow{r} = (-3; 1) + K(6; 3)$.

② Déterminer la mesure de l'angle aigu de la droite $x - 2y + 3 = 0$ et la droite qui passe par les deux points $(4; -1)$, $(2; 1)$.

③ A B C est un triangle dont A (0; 2), B(3; 1) et C(-2; -1), trouve la mesure de l'angle A

4 - 4 Longueur de la perpendiculaire abaissée (distance) d'un point à une droite

Apprendre

- Déterminer la longueur de la perpendiculaire menée d'un point à une droite.

Expressions de base

- Perpendiculaire
- ligne droite

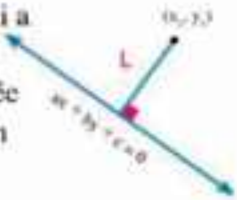
Matériel et moyens

- calculatrice scientifique

A apprendre

Détermination de la longueur d'une perpendiculaire abaissée d'un point connu à une droite.

Si le point (x_1, y_1) n'appartient pas à une droite qui a l'équation $ax + by + c = 0$,
alors la longueur de la perpendiculaire (L) abaissée d'un point à la droite est déterminée par la relation



$$L = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exemple

① Déterminer la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (4 ; 5) à la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (0; 2) + K(4; 3)$

la Solution

On suppose que $(x, y) = (0; 2) + K(4; 3)$

$\therefore\ x = 4K,\ y = 2 + 3K$ — équations paramétriques de l'équation vectorielle

$\frac{x}{4} = \frac{y - 2}{3}$ — En éliminant K

$3x = 4y - 8$ — produit des extrêmes = produit des moyens

$3x - 4y + 8 = 0$ — équation cartésienne

$L = \frac{|a x_1 + b y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ — Formule de la loi de la longueur de la perpendiculaire

par substitution: $a = 3$, $b = -4$, $c = 8$, $x_1 = 4$, $y_1 = -5$

$$L = \frac{|3 \times 4 - 4 \times -5 + 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|12 + 20 + 8|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|40|}{\sqrt{25}} = \frac{40}{5} = 8 \text{ unités de longueur}$$

Essaie de résoudre

① Déterminer la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (2;-5) à la droite d'équation:

$\overrightarrow{r} = (-1; 0) + K(12; 5)$.

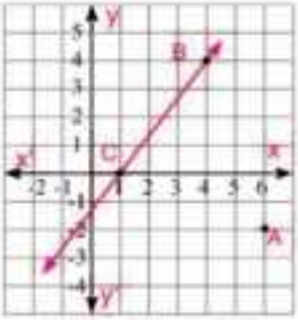
2 **Exprimentation orale:** Écrire la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A à la droite M dans les cas suivants :

A A (0 ; 0) , M : $ax + by + c = 0$

B A $(x_1; y_1)$, M : $y = 0$

C A $(x_1; y_1)$, M : $x = 0$

Exemple



2 **Dans la figure - ci-contre**: Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A (6; −2) à la droite qui passe par les deux points B (4; 4), C (1; 0), puis trouver l'aire du triangle ABC.

Solution

$p = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ formule de la pente

$\because$ C (1; 0) , B (4; 4)

$\therefore p = \frac{4 - 0}{4 - 1} = \frac{4}{3}$ par substitution des points (4; 4), (1; 0)

$p = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ équation d'une droite en connaissant la pente et un point sur elle

$\frac{4}{3} = \frac{y - 0}{x - 1}$ En substituant par $p = \frac{4}{3}$

ainsi: $4x - 3y - 4 = 0$ Équation cartésienne

$L = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ formule de la loi de la longueur de la perpendiculaire

alors la distance du point A (6; −2) à la droite d'équation $4x - 3y - 4 = 0$:

est: $L = \frac{|4 \times 6 - 3 \times -2 - 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|24 + 6 - 4|}{\sqrt{25}} = \frac{26}{5} = 5\frac{1}{5}$ unités de longueur

On suppose que la base du triangle ABC est $\overline{BC}$

$\because BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formule de la distance entre deux points

$= \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 0)^2} = 5$ unités de longueur par substitution des points (4; 4), (1; 0)

L'aire du triangle ABC $= \frac{1}{2}$ base × hauteur Énoncé de la loi de l'aire du triangle

$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{26}{5} = 13$ unités carré

Essaye de résoudre

3 Déterminer la longueur de la perpendiculaire abaissée du point (5; 2) à la droite qui passe par les deux points (0; −3), (4; 0).

Test de compréhension

1 **Routes** Deux routes adjacentes. La première route est représentée par l'équation $3x - 4y - 7 = 0$ et l'autre route par l'équation $3x - 4y + 11 = 0$.
Prouve que les 2 routes sont parallèles, puis trouve la distance entre elles.

4 - 5 Équation générale d'une droite passant par le point d'intersection de deux droites

Apprendre

- comment trouver la forme générale de l'équation d'une droite qui passe par le point d'intersection de deux droites

Expressions de base

- Point d'intersection des deux droites.
- Équation générale.

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique.

Réfléchis et discute

Tu as déjà étudié comment trouver les coordonnées du point d'intersection entre deux droites non parallèles
$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$; $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$
Est ce que tu peux trouver quelques droites passant par le point d'intersection des deux droites précédentes?

A apprendre

Équation générale d'une droite passant par le point d'intersection de deux droites données

$\because$ Il y a une infinité de droites passant par un point donné.

$\therefore$ L'équation qui représente toutes les droites passant par le point d'intersection des deux droites

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$; $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ est:

$m (a_1 x + b_1 y + c_1) + l (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0$; $m \in R$; $l \in R$ (1)

dans le cas de $m = 0$; on obtient l'équation de la seconde droite.

dans le cas de $l = 0$; on obtient l'équation de la première droite.

mais si $m \neq 0$; $l \neq 0$; on obtient l'équation d'une droite passant par le point d'intersection et on peut mettre l'équation sous la forme de:

$$\boxed{a_1 x + b_1 y + c_1 + k (a_2 x + b_2 y + c_2) = 0}$$ K constant (2)

Exemple

1. Trouver l'équation de la droite passant par le point A (– 2; 4) et par le point d'intersection des deux droites d'équations:

$x + 2y - 5 = 0$; $2x - 3y + 4 = 0$

Solution

$a_1 x + b_1 y + c + k(a_2 x + b_2 y + c) = 0$ — équation générale

$x + 2y - 5 + k(2x - 3y + 4) = 0$ — En substituant l'équation de deux droites

$-2 + 2 \times 4 - 5 + k(2\times -2 - 3\times 4 + 4) = 0$ — En substituant $x = -2$, $y = 4$

$1 - 12k = 0$ est d'où . $k = \frac{1}{12}$ — par simplification

$x + 2y - 5 + \frac{1}{12}(2x - 3y + 4) = 0$ — En substituant la valeur de K

$12x + 24y - 60 + 2x - 3y + 4 = 0$ — En multipliant les deux membres par 12

$14x + 21y - 56 = 0$ — En simplifiant

$2x + 3y - 8 = 0$ — Division les deux membres par 7

Essaye de résoudre

1. Trouver une équation de la droite passant par le point A (2; -1) et par le point d'intersection des deux droites d'équations: $7x + y + 3 = 0$; $5x - y - 3 = 0$

Exemple

2. Prouve que les deux droites $2x - 3y + 4 = 0$; $\overrightarrow{r} = (1; 2) + k(-2; 3)$ sont perpendiculaires, puis déterminer leur point d'intersection:

Solution

$p_1 = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$; $p_2 = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$ — pente de deux droites.

$\therefore p_1 \times p_2 = \frac{2}{3} \times -\frac{3}{2} = -1$ — condition de la perpendiculaire de deux droites..

$\because p_1 \times p_2 = -1$

$\therefore$ Les deux droites sont perpendiculaires .

Pour trouver le point d'intersection, on trouve l'équation cartésienne de la deuxième droite.

$\because (x; y) = (1; 2) + k(-2; 3)$

$\therefore \frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3}$ — Elimination de la constante k.

$3x - 3 = -2y + 4$ — produit des extrêmes = produit des moyens

$3x + 2y - 7 = 0$ — en simplifiant

$2x - 3y + 4 = 0$; $3x + 2y - 7 = 0$ — par résolution des deux équations

$\therefore x = 1$; $y = 2$

ainsi le point d'intersection des deux droites perpendiculaires est (1; 2)

Essaye de résoudre

2. Prouver que les deux droites d'équations $x - 4y + 14 = 0$ et $4x + y + 5 = 0$ sont perpendiculaires, puis déterminer leur point d'intersection et l'équation de la droite qui passe par leur point d'intersection et par le point (2; 1).

Test de compréhension

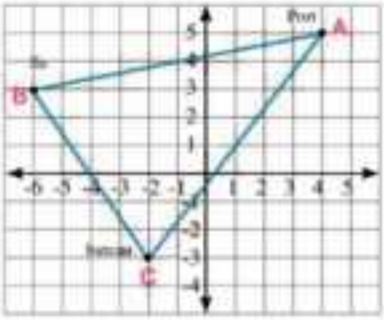
Si L_1: $3x + 2y - 7 = 0$; L_2: $\overrightarrow{r} = (-2; 0) + k\,(3; 2)$.

Trouver:

1. L'équation cartésienne de L_2
2. La mesure de l'angle de deux droites L_1, L_2
3. Point d'intersection des deux droites L_1, L_2.
4. L'équation de la droite qui passe par le point d'intersection des deux droites et par le point (3;4)
5. La longueur de la perpendiculaire abaissée du point d'intersection de deux droites à la droite d'équation $3x - 4y - 9 = 0$
6. L'aire du triangle limitée par les deux droites L_1, L_2 et l'axe des abscisses.

Activité

la figure ci-contre, indique un réseau décimal divisé en miles marin montrant les coordonnées du port A(4; 5), d'île B (-6; 3) du bateau C (-2; -3).



Trouver :

1. La distance en miles marin du port au bateau.
2. Le temps mis pour que le bateau traverse la distance $\overline{AB}$ si sa vitesse = 20 nœuds.
3. Le rapport du partage de $\overline{BC}$ par l'axe des x et trouve les coordonnées du point de partage.
4. L'équation de la trajectoire du bateau s'il se déplace en ligne droite.
5. La distance entre le bateau et l'île.
6. La mesure de l'angle de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$
7. L'aire du triangle ABC

Le nœud, c'est l'unité de mesure de la vitesse des bateaux dans la mer, il équivaut un mile marin et chaque mile marin égal 1852 m sachant que le mile terrestre égal 1600 m

Technologie:

8. En utilisant l'internet (réseau mondial).

   A Recherche les services de la coopération Egyptienne données aux bateaux

   Est- ce que tu préfère travailler dans le secteur marin. Pourquoi?

   B Déterminer les ports les plus importants en R.A.E et déterminer leurs positions.

Résumé de l'unité

① Si C partage $\overrightarrow{AB}$ dans le rapport de m_2: m_1 tel que $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r}$ sont les vecteurs orientés de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ respectivement

alors: $\overrightarrow{r} = \dfrac{m_1 \overrightarrow{r_1} + m_2 \overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$, $(x; y) = \left(\dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}\right)$

② La pente de la droite (m):

A qui fait un angle positif (θ) avec le sens positive de l'axe des abscisses: $p = \text{tg}\,\theta$

B qui passe par les deux points $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$: $p = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

C si l'équation est sous la forme : $\overrightarrow{r} = (x_1;y_1) + k\,(a, b)$, $p = \dfrac{b}{a}$

D si l'équation est sous la forme : $ax + by + c = 0$, $p = \dfrac{-a}{b}$

③ Si $\overrightarrow{N} = (a, b)$ est un vecteur directeur perpendiculaire à une droite donnée, alors le vecteur directeur de la droite est $(b, -a)$ ou $(-b, a)$.

④ Si p_1, p_2 sont les pentes des deux droite données, alors:

A $p_1 = p_2$, Si les 2 droites sont parallèles.

B $p_1 \times p_2 = -1$, Si les deux droites sont perpendiculaires.

⑤ Les équations d'une droite:

A L'équation vectorielle est: $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{A} + k\,\overrightarrow{u}$ c'est- à dire que $(x, y) = (x_1, y_1) + K(a, b)$

B Les équations paramétriques sont : $x = x_1 + Ka$, $y = y_1 + Kb$

C L'équation cartésienne est $p = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

D En fonction de la pente (m) et la partie découpée par l'axe des ordonnées c : $y = px + c$

E En fonction des 2 parties interceptées a, b des deux axes x et y : $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

F L'équation générale : $ax + by + c = 0$ tel que a et b ne sont pas nuls ensembles.

G L'équation générale de l'équation passant par le point d'intersection des deux droites, est: $a_1 x + b_1 y + c + k\,(a_2 x + b_2 y + c) = 0$ tel que $k \neq 0$

⑥ Si (θ) est la mesure de l'angle aigu de deux droites L_1, L_2 ayant pour pentes p_1 et p_2 est :
$\text{tg}\,\theta = \left|\dfrac{p_1 - p_2}{1 + p_1 p_2}\right|$, $p_1 p_2 \neq -1$

⑦ La longueur de la perpendiculaire (l) abaissée du point (x_1, y_1) à la droite d'équation $ax + by + c = 0$, est:

$l = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Unité 5

Trigonométrie

Objectifs de l'unité

Après l'étude de l'unité, l'élève devra être capable de :

- Déduire les relations fondamentales entre les fonctions trigonométriques.
- Prouver la justesse des identités sur les fonctions trigonométriques .
- Résoudre des équations trigonométriques simples en général à l'intervalle [0, 2π[
- Reconnaître la solution générale de l'équation trigonométrique.
- Résoudre le triangle droit.
- Résoudre les applications concernant l'angle d'élévation et d'abaissement.
- Reconnaître le secteur circulaire et comment trouver son aire.
- Reconnaitre le segment circulaire et comment trouver son aire.
- Trouver l'aire du triangle, l'aire du quadrilatère et l'aire du polygone régulier.
- Résoudre des problèmes variés sur la trigonométrie.
- D'utiliser la technologie des informations pour reconnaître les applications variables, des concepts de la trigonométrie.
- Faire un modèle de quelques phénomènes physiques et vitaux qui représentent les fonctions trigonométriques.
- Utiliser les activités des programmes de l'ordinateur

Expressions de base

- Identités trigonométriques
- Équation trigonométrique
- Angle d'élévation
- Angle d'abaissement
- Secteur circulaire
- Segment circulaire

Leçons de l'unité

Leçon (5 - 1) : Les relations fondamentales.

Leçon (5 - 2) : Résolution des équations trigonométriques.

Leçon (5 - 3) : Résolution d'un triangle rectangle.

Leçon (5 - 4) : Applications sur l'angle d'élévation et abaissement.

Leçon (5 - 5) : Le secteur circulaire

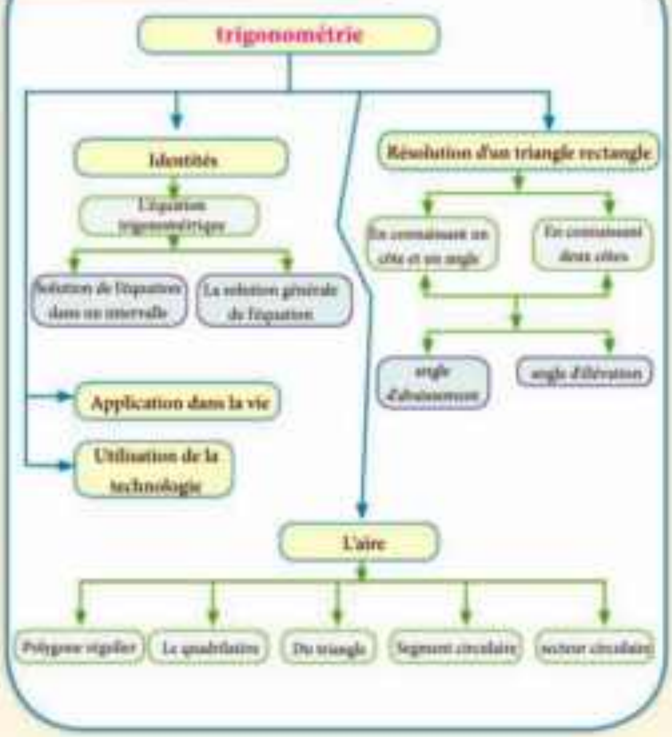
Leçon (5 - 6) : Le segment circulaire.

Leçon (5 - 7) : Aire du triangle aire du quadrilatère et l'aire du polygone régulier.

Matériel utilisé

Calculatrice scientifique - feuille quadrillé ordinateur en lien à l'internet - programme de graphique.

Organigramme de l'unité



Historique

La trigonométrie est une des branches des mathématiques. et cette branche représente les calcules du triangle. par rapport à ses angles et ses côtés. Quelques historiens citent que le mathématiciens Arabe Nosir Aldin Altusi était le premier à séparer la trigonométrie de l'astronomie. et de même le savant "Thalès "(600 A.J) a utilisé la trigonométrie pour mesurer la hauteur de la pyramide on comparant entre la longueur de l'ombre d'un bâton vertical et la longueur de l'ombre de la pyramide. Le savant arabe Abu al waffa albozgany était le premier qui a utilisé le mot ombre dans le $10^{ème}$ siècle.

Cette expression fut prise de l'ombre des corps qui se forme comme résultat de la propagation de la lumière émise du soleil en ligne droite. De même les Arabes ont ajouté à la trigonométrie (Plane et sphérique) plusieurs modifications. Les Européens ont pris des Arabes les informations importantes et ont ajouté plusieurs modifications Ainsi la trigonométrie comporte plusieurs recherches mathématiciennes et ses applications ont coopéré a poussé la roue de la civilisation.

5 - 1 Identités trigonométriques

A apprendre

- Identités.
- Simplifier les quantités trigonométriques.
- Démontrer la validité des identités.

Expressions de base

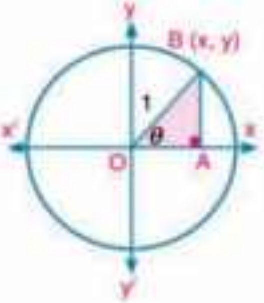
- Equation
- Identité

Matériel et moyens

- calculatrice scientifique

Relations essentielles entre les fonctions trigonométriques

Réfléchis et discute



Tu as déjà étudié dans le premier semestre les propriétés des fonctions trigonométriques et leurs représentations graphiques. Dans cette unité, on utilise les identités trigonométriques pour simplifier les expressions pour résoudre les équations trigonométriques.

Tu as étudié le cercle trigonométrique et tu as su que $\angle AOB$ est un angle orienté dans la position standard et son côté final est $\overrightarrow{OB}$ qui coupe le cercle en B(x, y) tel que $m(\angle AOB) = \theta$, $B(\cos\theta,\ \sin\theta)$. Est-ce que tu peux déduire quelques relations principales entre les fonctions trigonométriques?

A apprendre **Identités et les équations trigonométriques**

Identité: est une égalité, vraie pour toutes les valeurs du variable réel

Par exemple: $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$ est une identité vraie pour toutes les valeurs réelles de θ.

L'équation: est une égalité vraie pour quelques valeurs qui vérifient cette égalité, et n'est pas vraie pour les autres qui ne vérifient pas .

Par exemple: $\sin\theta = \frac{1}{2}$, $\theta \in [0; 2\pi[$

On trouve que: Les valeurs de θ qui vérifient cette équation et qui correspond à l'intervalle $[0; 2\pi[$ sont $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$ seulement.

Essaye de résoudre

1. Laquelle des relations suivantes représente une équation et laquelle représente une identité.

A $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** $tg(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\text{cotg}\,\theta$

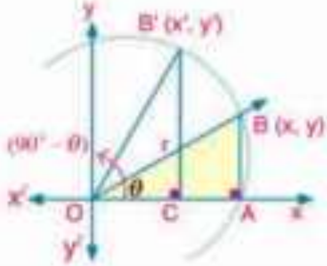
C $\text{cotg}\,\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D** $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

Les identités trigonométriques fondamentales

1- Tu as déjà étudié les fonctions trigonométriques et ses inverses . On a:

$$\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}\ ,\quad \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}\ ,\quad \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\operatorname{cotg}\theta}$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}\ ,\quad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\ ,\quad \operatorname{cotg}\theta = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta}$$

2- Les fonctions trigonométriques de deux angles complémentaires :



$$\sin(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta\ ,\quad \cos(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta$$
$$\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \operatorname{cotg}\theta\ ,\quad \operatorname{cosec}(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \sec\theta$$
$$\sec(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \operatorname{cosec}\theta\ ,\quad \operatorname{cotg}(\tfrac{\pi}{2}-\theta) = \operatorname{tg}\theta$$

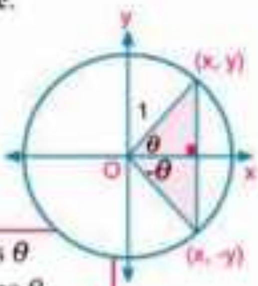
De l'identité des deux triangles: OAB, B'CO on trouve que: $y' = x$, $x' = y$

3- L'identité des deux angles θ et $-\theta$

on remarque de la figure ci-contre que:

- $x = \cos\theta$, $x = \cos(-\theta)$
- $y = \sin\theta$, $-y = \sin(-\theta)$

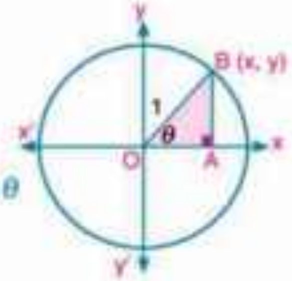
On a :



Les identités liées aux angles θ, $-\theta$ sont nommés identités des fonctions paires et impaires, qui sera étudié ultérieurement.

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta\ ,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta\ ,\quad \sec(-\theta) = \sec\theta$$
$$\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta\ ,\quad \operatorname{cotg}(-\theta) = -\operatorname{cotg}\theta$$

4- Identité de Pythagore :



Du cercle trigonométrique nous savons que :

$x^2 + y^2 = 1$ ① **et par substitution de $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$**

alors: $\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

Si on divise les 2 membres de ① par x^2 alors :

$$\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{x^2}$$

c'est -à- dire: $\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta}$

Si on divise les deux membres de ① par y^2 , alors :

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

c'est - à -dire: $\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta}$

5- L'expression $\text{tg}\,\theta = \frac{y}{x}$, $\text{cotg}\,\theta = \frac{x}{y}$, en fonction de $\sin\theta$, $\cos\theta$:

$$\therefore \text{tg}\,\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \therefore \text{cotg}\,\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Simplification des expressions trigonométriques :

C'est-à-dire, mettre les expressions sous la forme la plus simple en utilisant les identités trigonométriques fondamentales.

Exemple

Remarque que
$\sin\theta \times \sin\theta = (\sin\theta)^2 = \sin^2\theta$

① **Mettre sous la forme la plus simple:** $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta$

Solution

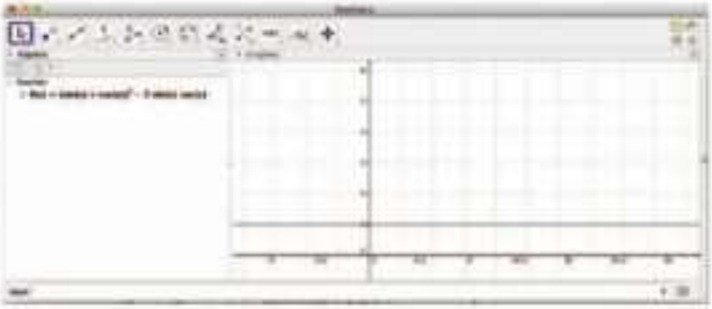
A La valeur $= (\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 2\sin\theta\cos\theta$ **(développer les parenthèses)**

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta$ **(Par simplification)**

$= 1$ **(en appliquant l'identité de Pythagore)**

On peut vérifier ce résultant en utilisant l'un des programmes de dessin démontré dans la figure suivante :



① Mettre sous la forme la plus simple: $\frac{1 + \text{tg}^2\theta}{1 + \text{cotg}^2\theta}$

Solution

L'expression : $\frac{1 + \text{tg}^2\theta}{1 + \text{cotg}^2\theta}$

En appliquant l'identité de Phythagore $= \frac{\sec^2\theta}{\text{cosec}^2\theta}$

$= \frac{1}{\cos^2\theta} \div \frac{1}{\sin^2\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \text{tg}^2\theta$

Essayer de résoudre

② Mettre les expressions suivantes sous la forme la plus simple, puis vérifier la vérité du résultat:

A $\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\text{cotg}^2\theta}$ B $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\sec(\frac{\pi}{2} - \theta)$ C $\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(2\pi - \theta)}$

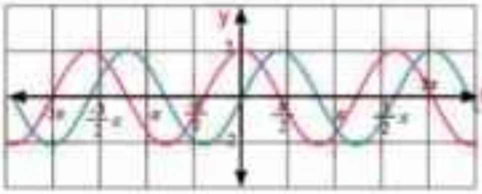
Identités trigonométriques :

Pour prouver la vérité de l'identité, il faut prouver que les fonctions déterminantes aux deux membres sont égaux.

Et pour vérifier que l'expression : $\cos 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ n'est pas vraie.

On fait le graphique des deux fonctions:

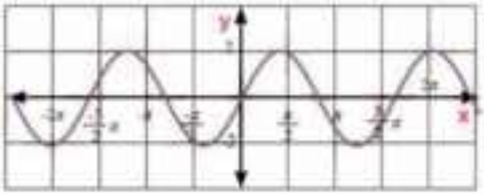
$f(x) = \cos 2\theta$, $g(x) = 2\sin\theta\cos\theta$



En observant le graphique ci-contre

On trouve que les deux fonctions ne sont pas

c'est-à - dire que. $f(x) \neq g(x)$.



ainsi il cette relation n'est pas identités relation Il est possible d'vérifier ceci algébriquement en rem plaçant $\theta = 0$; alors $f(0) = 1$; $g(0) = 0$ ainsi.

les deux fonctions ne sont pas égales

Mais dans l'égalité : $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

et en rem plaçant $f(x) = \sin 2\theta$; $g(x) = 2\sin\theta\cos\theta$

On trouve que les deux fonctions sont confondues graphiquement **c'est- à- dire.** $f(x) = g(x)$ ainsi cette égalité est une identité.

Rappelle-toi

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

Exemple

2 **Prouver que l'identité suivante soit vraie:** $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = 1 + \sin\theta$

Solution

Membre gauche $= \frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}$

$= \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{1-\sin\theta} = 1 + \sin\theta =$ **Membre droit**

Exemple

3 **Prouver que l'identité suivante soit vraie : tg θ + cotg θ = sec θ cosec θ**

Solution

Membre gauche $= \text{tg}\,\theta + \text{cotg}\,\theta$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}$

$= \sec\theta\,\text{cosec}\,\theta =$ **Membre droit**

Essayer de résoudre

3 **Prouver que l'identité suivante soit vraie :** $\frac{(1-\sin^2\theta)(1-\cos^2\theta)}{tg^2\theta} = \cos^4\theta$

Exemple

4 **Prouver que l'identité suivante soit vraie :** $\frac{1-cotg^2\theta}{1+cotg^2\theta} = 2\sin^2\theta - 1$

Solution

Membre gauche $= \frac{1-cotg^2\theta}{1+cotg^2\theta}$

$$= \frac{1-cotg^2\theta}{cosec^2\theta} = \frac{1-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{1-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\sin^2\theta}} \times \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = \sin^2\theta - \cos^2\theta$$

$$= \sin^2\theta - (1-\sin^2\theta)$$

$= 2\sin^2\theta - 1 =$ membre droit

Réfléchis: y - a - t - il d'autres solutions pour l'exemple précédent ?

Essayer de résoudre

4 Prouver que chacune des identités suivantes soit vraie:

A $\frac{1+cotg^2\theta}{1+tg^2\theta} = cotg^2\theta$ **B** $\frac{tg\,\theta + cotg\,\theta}{\sec\theta\, cosec\,\theta} = 1$

C $(\sec\theta - tg\,\theta)^2 = \frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}$

Test de compréhension

1 **Découvre la réponse fausse :**

$\sin^2\theta + \cos^2\theta$ égale:

A 1 **B** $2\cos^2\theta - 1$ **C** $1 - 2\sin^2\theta$ **D** $1 + 2\sin\theta\cos\theta$

2 **Prouver que les identités suivantes soient vraies:**

A $\frac{\sin\theta\cos\theta}{tg\,\theta} + \frac{tg\,\theta}{\sec\theta\, cosec\,\theta} = 1$ **B** $\frac{\sin^3\theta + \cos^3\theta}{\sin\theta + \cos\theta} + \frac{\sin^3\theta - \cos^3\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 2$

Résolution des équations trigonométriques

5 - 2

Résolution de l'équation trigonométrique par des solutions réelles

Réfléchis et discute

On a déjà étudié la solution des équations algébriques du premier déjà et du second degré (algébriquement et graphiquement). Dans cette leçon, on va résoudre les équations trigonométriques en utilisant les identités fondamentales, Est- ce qu' il y a une ressemblance entre la solution des équations algébriques et la solution des équations trigonométriques :

Travail en groupe

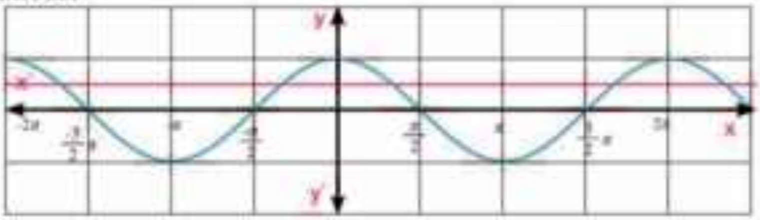
Coopère avec un de tes collègues pour dessiner la fonction trigonométrique $y = \cos\theta$ et la fonction $y = \frac{1}{2}$ et observe les points d'intersections communs

1- Dessine la courbe de la fonction $y_1 = \cos\theta$; $y_2 = \frac{1}{2}$ et observe les points d'intersections

2- Combien de solutions pour l'équation $\cos\theta = \frac{1}{2}$ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$?

3- y-a-t-il d'autres solutions pour l'équation $\cos\theta = \frac{1}{2}$ dans le graphique?

Le graphique suivant représente la solution de l'équation $\cos\theta = \frac{1}{2}$ tel que $\frac{\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$ quand $\theta \in [0; 2\pi[$, on ajoute 2π ou -2π on obtient d'autres solutions.



A apprendre

- Trouver la solution générale des équations trigonométriques
- Résolution des équations dans l'intervalle $[0; 2\pi[$

Expressions de base

- Équation trigonométrique
- Solution générale

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique
- Calculatrice de graphique

Solution générale des équations trigonométriques

Exemple

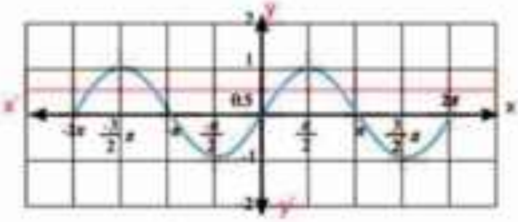
(1) Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes :

A $\sin\theta = \frac{1}{2}$ **B** $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $tg\,\theta = \sqrt{3}$

Solution

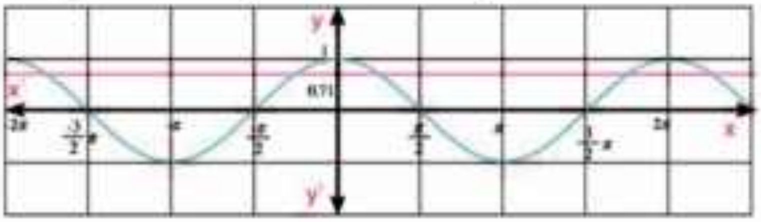
A $\because \sin\theta = \frac{1}{2}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

alors la solution générale de l'équation est $\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ ou $\frac{5\pi}{6} + 2n\pi$, $n \in Z$



B $\because \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$

alors la solution générale de l'équation est $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$



C $\because \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

alors la solution générale de l'équation est $\frac{\pi}{3} + n\pi$, $n \in Z$

Essaye de résoudre

1. **Trouver la solution générale pour chacune des équations suivantes :**

A $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **B** $2\cos\theta = 1$ **C** $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exemple

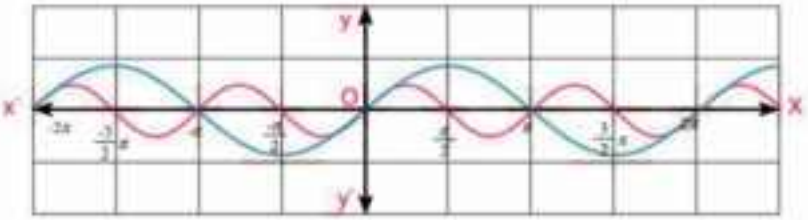
2. **Trouver la solution générale de l'équation : $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$**

Solution

$\sin\theta\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = 0$ $\sin\theta(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$

soit	$\sin\theta = 0$	ou bien	$\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
			$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	$\theta = 0$,		$\theta = \frac{\pi}{6}$
la solution générale de l'équation	$\theta = n\pi$ dont $n \in Z$		$\theta = \pm\frac{\pi}{6} + 2n\pi$ dont $n \in Z$

la figure suivante représente une partie de la solution de l'équation.



Réflexion critique: Est-ce que toutes les équations trigonométriques ont essentiellement des solutions réelles ? Explique par des exemples.

Essaye de résoudre

2) Trouve la solution générale de chacune des équations suivantes :

A $\cos^2\theta - \cos\theta = 0$ B $2\sin^2\theta = \sin\theta$ C $\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0$

Résolutions des équations trigonométriques dans le l'intervalle $[0, 2\pi[$

Exemple

3) Résoudre l'équation: $\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = 0$ sachant que $0° < \theta < 180°$

Solution

$\cos\theta(\sin\theta - \frac{1}{2}) = 0$ **par factorisation**

$\cos 0 = \theta$ ou $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\theta = 90°$ ou $\theta = 30°$ ou $150°$

La solution de l'équation est : $30°$ ou $90°$ ou $150°$

Essaye de résoudre

3) Soit $0° < \theta \leqslant 360°$, trouver l'ensemble solution de chacune des équations suivantes:

A $2\sin\theta\cos\theta + 3\cos\theta = 0$ B $4\sin^2\theta - 3\sin\theta\cos\theta = 0$

Test ta compréhension

1) Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes en radians :

A $\text{tg}\,\theta = 1$ B $\cos\theta = \sin 2\theta$ C $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

5 - 3 Résolution d'un triangle rectangle

A apprendre

- Résolution d'un triangle rectangle en fonction des deux côtés
- Résolution d'un triangle rectangle en fonction de l'un des côtés et la mesure de l'un de ses angles aigues.

Expressions de base

- Résolution d'un triangle

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

On sait qu'un triangle a six éléments : 3 côtés et 3angles . Résoudre un triangle consiste à trouver les mesures de ses éléments.
Pour résoudre un triangle rectangle il suffit de connaître les longueurs de deux de ses côtés ou la longueur d'un côté et la mesure d'un des deux angles aigus.

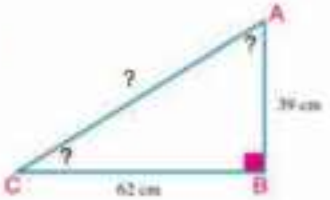
Résolution d'un triangle rectangle en fonction de deux de ses côtés :

Exemple

(1) Résoudre le triangle ABC rectangle B dont AB = 39 cm et BC = 62 cm.

Solution

Premièrement : On trouve m ($\angle$ C):



$\because$ tg C = $\frac{AB}{BC}$

$\therefore$ tg C = $\frac{39}{62} \simeq 0{,}6290322581$

ainsi utilisant une calculatrice:

m($\angle$ C) = 32°10'17"

⟶ [3] [9] [÷] [6] [2] [=] [Shift] [tg] [Ans] [=] [°'"]

on trouve m($\angle$ A) :

m($\angle$ A) = 90° – 32° 10'17" = 57° 49'43"
ou en utilisant une calculatrice comme suit :

⟶ [9] [0] [–] [3] [2] [°'"] [1] [0] [°'"] [1] [7] [°'"] [=] [°'"]

Deuxièmement: On trouve la longueur de: $\overline{AC}$

$\because$ sin C = $\frac{AB}{AC}$ $\because$ sin 32°10'17" = $\frac{39}{AC}$

⟶ 3 9 ÷ (sin 3 2 °''' 1 0 °''' 1 7 °''') =

alors $AC = \frac{39}{\sin 32°10'17''} \simeq 73{,}24581124$ cm

Réfléchis

- Est-ce qu on peut trouver la longueur de $\overline{AC}$ par des autres fonctions trigonométriques ? Nomme ces fonctions si elles existent
- Est-ce qu on peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur de $\overline{AC}$, écrire les étapes de la solution. s'il est possible .
- Que préfères - tu le théorème de Pythagore ou les fonctions trigonométriques pour trouver la longueur de $\overline{AC}$? Pourquoi?

Essaye de résoudre

(1) Résoudre le triangle ABC rectangle en B dans les deux cas suivants :

A AB = 8 cm et BC = 12 cm　　　　**B** BC = 5 cm et AC = 13 cm

Résolution d'un triangle rectangle en fonction de la longueur d'un côté et la mesure d'un angle aigu.

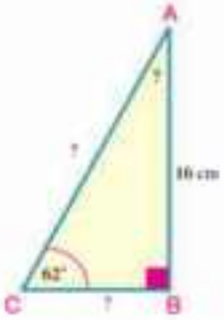
Exemple

(2) Résoudre le triangle ABC rectangle en B, si m (∠ C) = 62°, et AB = 16 cm,(donne les longueurs à deux décimales près) .

Solution

On trouver m(∠ A):

m(∠ A) = 90° − 62° = 28°



On trouver la longueur de $\overline{BC}$:

$\because$ $\text{tg } C = \frac{AB}{BC}$　　**donc:** $\text{tg } 62° = \frac{16}{BC}$ donc

$BC \times \text{tg } 62° = 16$

$BC = \frac{16}{\text{tg } 62°} = 8{,}507350907 \simeq 8{,}51$ cm

On trouve la longueur de $\overline{AC}$:

$\because$ $\sin C = \frac{AB}{AC}$　　**donc :** $\sin 62° = \frac{16}{AC}$

$AC \times \sin 62° = 16$

$AC = \frac{16}{\sin 62°} = 18{,}12112081 \simeq 18{,}12$ cm

Essaye de résoudre

(2) Résoudre le triangle ABC rectangle en B dans les deux cas suivants :

A AB = 8 cm et m(∠ C) = 34°　　　　**B** AC = 26 cm et m(∠ A) = 53° 12'

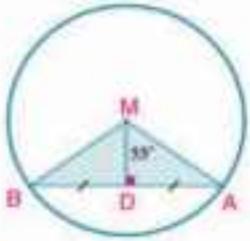
Réflexion critique:
Est-ce qu' on peut résoudre le triangle rectangle en fonction de ses deux angles aigus ? Interprète ta réponse.

Exemple

3 Lien à la géométrie: Dans un cercle de 7 cm de rayon , trouver, à trois décimales près, la longueur da la corde Qui est opposée a un angle au contre de 110° de mesure.

Solution

Dans la figure ci-contre: On trace $\overline{MD} \perp \overline{AB}$



De la propriété du cercle: D est le milieu de $\overline{AB}$

$m(\angle AMD) = 110° \div 2 = 55°$

On trouve la longueur de $\overline{AD}$ **dans le triangle rectangle** ADM:

$\sin(AMD) = \frac{AD}{AM}$ **De la définition de la fonction du sinus**

C'est-à-dire : $\sin 55° = \frac{AD}{7}$

Produit des moyens = produit des extrêmes :

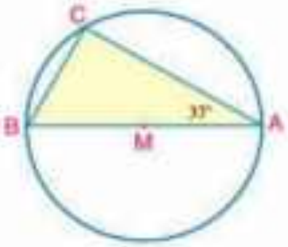
$AD = 7 \times \sin 55° \simeq 5{,}73406431$ cm

On trouve la longueur de $\overline{AB}$**:** $AB = 2 \times AD$

C'est-à-dire : $AB = 2 \times 5{,}73406431 = 11{,}46812862 \simeq 11{,}468$ cm

Essaye de résoudre

3 Lien à la géométrie: **La figure ci-contre , représente un cercle de centre M,** $\overline{AB}$ **diamètre ,**
Si $AC = 12$ **cm,** $m(\angle A) = 37°$ **trouver la longueur du rayon du cercle à deux décimales prés.**



Test de compréhension

1 XYZ est un triangle dont XY = 11,5 cm, YZ = 27,6 cm, XZ = 29,9 cm. Prouver que le triangle est rectangle en Y, puis trouver la mesure de l'angle X.

2 Réflexion critique: Dans un cercle de 6 cm de rayon , trouver, a trois décimales près, la longueur da la corde qui est opposée a un angle au centre de 108° de mesure.

Angles d'élévation et d'abaissement

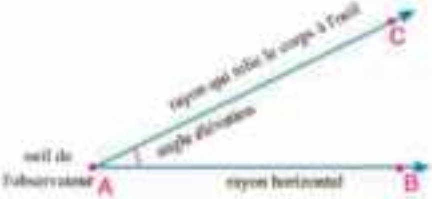
5 - 4

Réfléchis et discute

Si tu t'éloigne d'un minaret, peux- tu trouver la hauteur de ce minaret sans le mesurer ?

A apprendre — angles d'élévation et d'abaissement

1- Si une personne A observe un point C au dessus du niveau de sa vue horizontale $\overrightarrow{AB}$ ainsi l'angle entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ est appelé angle d'élévation C du niveau de vue par rapport au plan horizontal de l'observateur A .



2- Si une personne A observe un point D au dessous du niveau de sa vue horizontale $\overrightarrow{AB}$ ainsi l'angle entre $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ est appelé angle d'abaissement de vue par rapport D du niveau au plan horizontal de l'observateur A.

3- Dans la figure ci-contre :

- $\angle$ CAB est un angle d'élévation du ballon par rapport à une personne qui se trouve en A.
- $\angle$ DBA est un angle d'abaissement de la personne en A par rapport au ballon et alors : $\beta = \alpha$

A apprendre

- Concept des angles d'élévation et d'abaissement
- Utilisation du triangle rectangle pour la résolution des problèmes sur les angles d'élévation et d'abaissement

Expressions de base

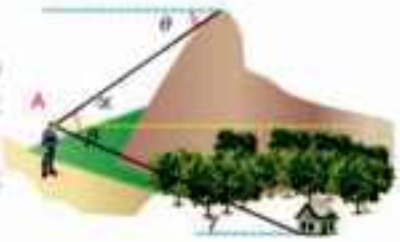
- Angle d'élévation
- Angle d'abaissement

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Essaye de résoudre

1 **Dans la figure ci-contre**

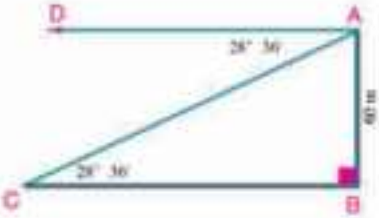


Premièrement: Parmi, les angles (γ), (β), (θ), (α) déterminer si elle est un angle élévation ou d'baissement par rapport au point A.

Deuxièmement : écrire les paires des angles qui ont même mesure.

Exemple

3 Du sommet d'une tour de 60 m de hauteur, on trouve que l'angle d'abaissement d'un corps dans le plan horizontal passant par la base de la tour, est 28° 36'. Quelle est la distance du corps à la base de la tour, à un mètre près.



Solution

On suppose que A est le sommet de la tour $\overline{AB}$ alors $\angle$ DAC est un angle d'abaissement du corps alors: $m(\angle C) = m(\angle DAC)$

Définition de la fonction tangente : $\text{tg } C = \frac{AB}{BC}$

Par substitution AB = 60: $\text{tg } 28° \; 36' = \frac{60}{BC}$

$BC \times \text{tg } 28° \; 36' = 60$

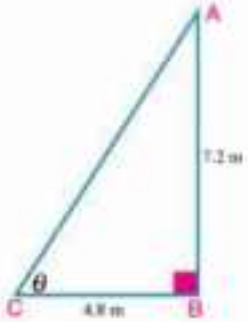
$BC = \frac{60}{\text{tg } 28° \; 36'} = 125{;}22966 \simeq 125$ mètres

Essaie de résoudre

2 Du sommet d'une montagne de 2;56 km de hauteur. Une personne observe , un point sur le sol , elle a trouvé que l'angle d'abaissement est 63°. Trouve la distance entre la personne et le point à 1 m près .

Exemple

4 Un poteau électrique de 7;2 m de long, son ombre sur la terre est de 4.8m de longueur, trouver en radians la mesure de l'angle d'élévation du soleil à ce moment.



Solution

On suppose que A est le sommet du poteau $\overline{AB}$ et BC, la longueur de l'ombre. θ , angle d'élévation du soleil.

$\because \text{tg } C = \frac{AB}{BC}$ $\quad\quad \therefore \text{tg } \theta = \frac{7;2}{4;8} = 1;5$

$m(\angle\theta) = 56°18'36''$

$\therefore$ **L'angle d'élévation du soleil en radians** $= 56°18'36'' \times \frac{\pi}{180°} \simeq 0{;}9827937232^{rad}$

Remarque:

On peut utiliser la calculatrice pour trouve θ en radians directement sans le trouver en degrés comme suit:

1- On met la calculatrice sur le programme des radians: (4: Rad) 4 Mode Shift ←

2- On introduit les détails: (tan-1) tan Shift 1 . 5

3- On demande les résultats : = 0.982793732

Essaye de résoudre

(3) Du sommet d'un rocher de 180 m de hauteur de la surface de la mer , on a mesuré l'angle d'abaissement d'un bateau équidistant de 300 m de la base du rocher . Trouve la mesure de l'angle d'abaissement en radians.

Exemple

(5) Du sommet d'un rocher de 50 m de hauteur. Une personne observe deux bateaux se trouvant sur le même rayon de la base du rocher. Elle a mesuré les angles d'abaissements qui sont égales à 38° et 55° respectivement . Trouve la distance entre les deux bateaux sachant que les deux bateaux et la base du rocher se trouvent dans le même plan horizontal

Solution

On suppose que AB soit la hauteur du rocher et la distance entre les deux bateaux est CD

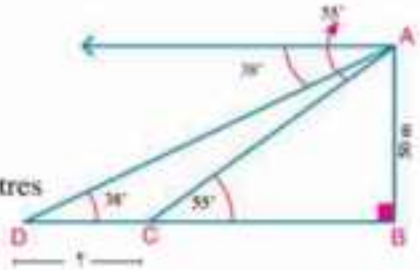
Dans $\triangle$ ABD

$\because \text{tg } 38° = \frac{50}{BD}$ $\quad\therefore BD = \frac{50}{\text{tg } 38°}$

$\therefore BD \simeq 64$ mètres

$\because \text{tg } 55° = \frac{50}{BC}$ $\quad\therefore BC = \frac{50}{\text{tg } 55°} \simeq 35$ mètres

$\because CD = BD - BC$ $\quad\therefore CD = 64 - 35 = 29$ mètres



Essaie de résoudre

(4) Une personne observe un ballon fixe et mesure de l'angle d'élévation est 30°, et quand la personne avance de 1000 m sur le plan horizontal en direction du ballon la mesure de l'angle d'élévation est alors 45°. Quelle est la hauteur du ballon à un mètre près?

Test la compréhension

(1) D'un point situé à 50 m de la base d'une tour, une personne a observé le sommet de la tour. Elle a trouvé que la mesure de son angle d'élévation est de 25°. Calculer la hauteur de la tour à 1 m près

(2) Une personne a observé un avion à 1000 m d'altitude, elle a trouvé que la mesure de son angle d'élévation est de 25°17' . Trouver la distance entre l'observateur et l'avion.

(3) Une personne a observé un avion à 800 m d'altitude, de la surface de la terre. Elle a trouvé que la mesure de son angle d'élévation est de 25°17' . Trouver la distance entre l'observateur et l'avion.

5 - 5 Secteur circulaire

A apprendre

- Définition d'un secteur circulaire
- Trouver l'aire du secteur circulaire.

Expressions de base

- Secteur circulaire

Matériel et moyens

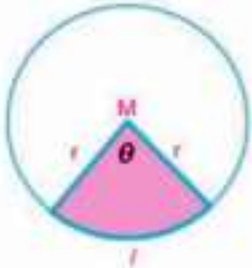
- Calculatrice scientifique

Réfléchis et discute

Secteur circulaire:

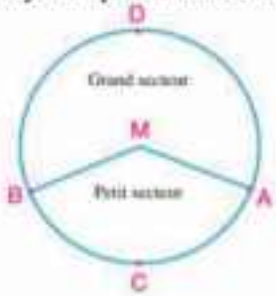
On a déjà étudié la relation entre la longueur d'un arc (l) d'un cercle de rayon (r) et l'angle au centre (θ) et on a: $l = \theta^{rad} \times r$.

Est -ce que on peut trouver l'aire de la partie colorée dans la figure ci-contre ?



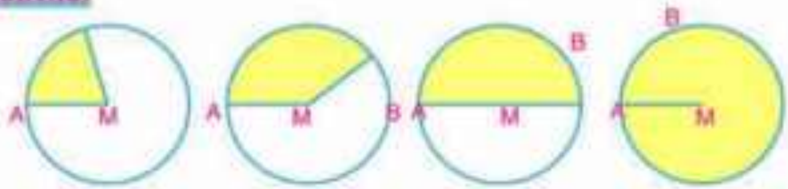
Secteur circulaire: C'est une partie de la surface d'un cercle limité par un arc de cercle et les rayons qui aboutissent aux extrémités de l'arc .

Dans la figure ci-contre, $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ divisent le cercle en deux parties chacune d'elles est appelée un secteur circulaire, la partie MACB est appelée le petit secteur circulaire et l'angle $\angle$ AMB est l'angle du petit secteur circulaire. La partie BDAM est appelée le grand secteur circulaire et l'angle $\angle$AMB rentrant est l'angle du grand secteur .



L'aire du secteur circulaire

Activité:



Les figures précédentes représentent 4 cercles identiques:

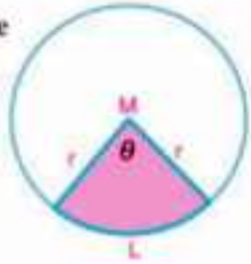
1- Est-ce que l'augmentation de l'aire des secteurs provient de l'augmentation du rayon du cercle ?

2- Est-ce que l'augmentation de l'aire des secteurs provient de l'augmentation dans la mesure de l'angle du secteur circulaire ?

3- Si l'augmentation de l'angle au centre est continue jusque à ce que le rayon $\overline{MB}$ coïncidé avec le côté $\overrightarrow{MA}$, qu'est ce que tu prévois à l'aire du secteur ?

A apprendre — L'aire du secteur circulaire en fonction de l'angle au centre et la longueur du rayon

L'aire du secteur est une partie de l'aire du cercle dont la mesure de l'angle au centre est 2π.



De l'activité précédente on déduit que:

$$\frac{\text{l'aire du secteur}}{\text{l'aire du cercle}} = \frac{\theta^{rad}}{2\pi}$$

L'aire de secteur $= \frac{\theta^{rad}}{2\pi} \times$ l'aire du cercle

$= \frac{\theta^{rad}}{2\pi} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} r^2 \theta^{rad}$

$\boxed{\text{L'aire du secteur circulaire} = \frac{1}{2} r^2 \theta^{rad}}$ (θ est l'angle du secteur et r est le rayon de son cercle)

Réflexion critique: Est-ce que le cercle représente un secteur circulaire ? Expliquer.

Exemple

1. Calculer l'aire d'un secteur circulaire dont le rayon 10cm et son angle mesure $1{,}2^{rad}$

Solution

Énoncé de la loi: L'aire du secteur circulaire $= \frac{1}{2} r^2 \theta^{rad}$

Par substitution $r = 10$; $\theta^{rad} = 1{,}2^{rad}$: $= \frac{1}{2}(10)^2 \times 1{,}2 = 60$ cm^2

Essaye de résoudre

1. L'aire d'un secteur circulaire est égale à 270 cm^2 et la longueur de son rayon est 15 cm , trouver son angle en radians.

Deuxièmement: Trouver l'aire d'un secteur circulaire en fonction de son angle en degrés:

$\because \frac{\text{l'aire du secteur}}{\text{l'aire du cercle}} = \frac{\frac{1}{2} r^2 \times \theta^{rad}}{\pi r^2}$

mais $\frac{\theta^{rad}}{2\pi} = \frac{x^\circ}{360^\circ}$

$\therefore$ L'aire du secteur $= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ l'aire du cercle

> **Rappelle-toi**
> **La relation entre la mesure totale et la mesure circulaire est:**
> $\frac{\theta^{rad}}{\pi} = \frac{x^\circ}{180^\circ}$

Exemple

2. Calcule l'aire d'un secteur circulaire sachant que la longueur de son rayon est 16 cm et que son angle mesure 120°, à un centimètre carré près

Solution

La formule : l'aire du secteur $= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

Par substitution $r = 16$; $x^\circ = 120^\circ$: $= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi (16)^2 \simeq 268$ cm^2

Essaye de résoudre

(2) Calculer l'aire d'un secteur circulaire sachant que son angle mesure 60° et que le rayon du cercle est 12 cm (à une décimale près).

Troisièmement : L'aire d'un secteur circulaire en fonction de la longueur de son arc

Nous sachons que : l'aire d'un secteur circulaire $= \frac{1}{2} r^2 \theta^{rad}$

$$= \frac{1}{2} r^2 \times \frac{l}{r} = \frac{1}{2}\, l\, r$$

(Par substitution : $\theta^{rad} = \frac{l}{r}$)

> **Rappelle-toi**
> **La longueur de l'arc qui est opposé à un angle au centre θ dans un cercle de rayon r est déterminée par la relation : $l = \theta^{rad} \times r$**

Exemple

(3) Le périmètre d'un secteur circulaire est 28 cm et le rayon de son cercle est 8 cm . Trouver son aire.

Solution

Périmètre du secteur $= 2r + l$ **ainsi** $2r + l = 28$

Par substitution de r = 8 cm: $2 \times 8 + l = 28$

En simplifiant: $l = 28 - 16 = 12$ cm

La formule: l'aire du secteur $= \frac{1}{2}\, l\, r$

Par substitution : $l = 12$ cm, $r = 8$ cm:

$$\text{l'aire du secteur} = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48 \text{ cm}^2$$

> **Le périmètre d'un secteur dont la longueur de son arc l et la longueur du rayon du cercle est r est déterminé par la relation:**
> **Périmètre du secteur $= 2r + l$**

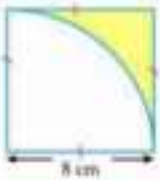
Essaye de résoudre

(3) Lien à la géographie: Si on connaît que l'équateur est un cercle de rayon 6380 km. Trouve la distance entre deux villes sur l'équateur si l'arc entre eux a un angle de 30° au centre de la terre.

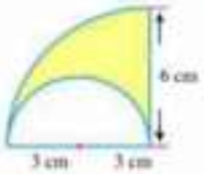
Test ta compréhension

(1) Trouver en fonction de π la partie colorée dans chacune des figures suivantes :

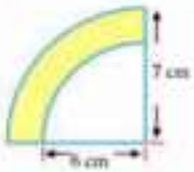
A



B



C



D

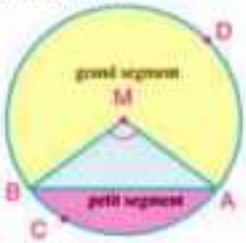
Segment circulaire

5 - 6

A apprendre

Segment circulaire

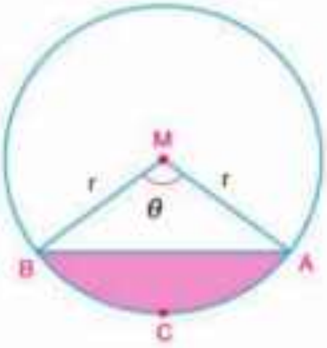
Un segment circulaire est une partie de la surface d'un cercle limitée par un arc et une corde passant par les extrémités de l'arc.



La corde $\overline{AB}$ partage la surface du cercle en deux parties qui sont appelées des segments circulaires

Est ACB **le petit segment**: ADB est le grand segment. L'angle $\angle$AMB appelé l'angle du petit segment. L'angle $\angle$AMB rentrant est appelé l'angle du grand segment.

L'aire du segment circulaire:



Rappelle – toi

Aire du triangle $= \frac{1}{2}$ r× h tel que:

$\sin\theta = \frac{h}{r}$

$h = r \sin\theta$

Aire de triangle =

$\frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$

L'aire du petit segment ACB

= l'aire du petit secteur MAB - l'aire du triangle MAB

$= \frac{1}{2} r^2 \theta^{rad} - \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$

$$\text{L'aire du segment circulaire} = \frac{1}{2} r^2(\theta^{rad} - \sin\theta)$$

Sachant que r est le rayon du cercle et θ est l'angle du segment circulaire

Réfléchis: Est -ce que on peut trouver l'aire du grand segment circulaire en fonction de l'aire du petit segment circulaire ? Expliquer.

A apprendre

- Segment circulaire
- Trouver l'aire du segment circulaire.

Expressions de base

- Segment circulaire

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifique

Exemple

1. Trouve l'aire d'un segment circulaire sachant que le rayon du cercle est 8cm, et que son angle mesure 150°.

Solution

$\theta^{rad} = 150° \times \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{6}$

$\sin\theta = \sin 150°$

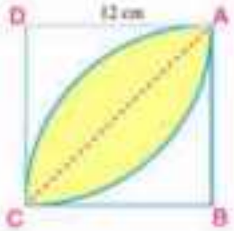
l'aire du segment circulaire $= \frac{1}{2} r^2 (\theta^{rad} - \sin\theta)$

l'aire du segment circulaire $= \frac{1}{2} \times 64 \left(\frac{5\pi}{6} - \sin 150°\right) \simeq 67{,}7758$ cm²

Essaye de résoudre

1. Trouver l'aire du segment circulaire sachant que le rayon du cercle est 10 cm et que son angle mesure $2{,}2^{rad}$, à deux décimales près.

Exemple



2. Dans la figure ci-contre
Deux cercles identiques des Centre B et D Sont
sécantes en A et C ; la longueur du rayon de chacun d`eux 12 cm.
Trouver l`aire de la partie commune de deux cercles.

Solution

Dessine $\overline{AC}$ qui coupe la partie colorée en deux segments identiques , si l'angle au centre de chacun d'eux est 90° et la longueur du rayon 12 cm.

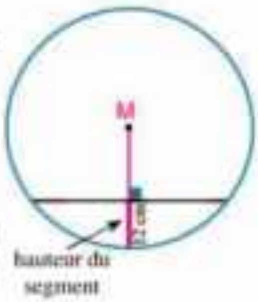
L'aire de la partie colorée $= 2 \times$ l'aire du segment circulaire

$= 2 \times \frac{1}{2} r^2 (\theta^{rad} - \sin\theta)$

$= 144 \left(\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 144 \times 0{,}75 \simeq 82{,}19$ cm²

Essaye de résoudre

2. Calcule, à 1cm² près l'aire du grand segment circulaire de 12 cm de corde et 2 cm de hauteur.



test ta compréhension

1. Ornement: Un bassin de fleur sous la forme d'un cercle de rayon 8m, on trace une corde de 8m. Calculer l'aire de petit segment circulaire, à une décimale près.

2. Agriculture: Un bassin de plante sous la forme d'un cercle de rayon 4 mètres. On le partage en 4 parties en utilisant un triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur le cercle . Calculer l'aire de l'un des petits segments circulaires, à deux décimales près .

Aires

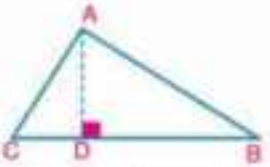
5 - 7

Réfléchis et discute

Aire du triangle

On a déjà étudié l'aire du triangle et on sait que l'aire du triangle est déterminé par :

l'aire du triangle = $\frac{1}{2}$ Base × hauteur



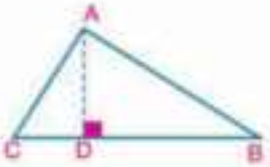
Dans la figure ci - contre :

l'aire de triangle = $\frac{1}{2}$ BC × AD

Réfléchis: Est–ce que cette relation s'applique sur le triangle rectangle et le triangle obtusangle?

Aire d'un triangle connaissant les longueurs des deux côtés et la mesure de l'angle compris entre ses deux côtés

A apprendre



Dans la figure ci-contre:

$\sin B = \frac{AD}{AB}$ **c'est - à-dire:** AD = AB sin B

De la formule de l'aire d'un triangle:

l'aire du triangle $= \frac{1}{2}$ BC × AD

$= \frac{1}{2} \times$ BC × AB sin B

Exprimentation orale: Trouver l'aire du triangle en fonction de:

A CA, CB, $\angle C$ **B** AB, AC, $\angle A$

En générale :

L'aire du triangle = demi produit des longueurs des deux côtés par le sinus de l'angle compris entre eux .

A apprendre

- L'aire de triangle.
- L'aire d'un quadrilatère .
- L'aire d'un polygone régulier

Expressions de base

- Polygone régulier

Matériel et moyens

- Calculatrice scientifiques

Exemple

1. Trouver l'aire du triangle ABC dont AB = 9 cm, AC = 12 cm et $m(\angle A) = 48°$, à deux décimales près.

Solution

L'aire du triangle A B C = $\frac{1}{2} \times AB \times AC \sin A$

AB = 9 **cm** , AC = 12 **cm** et **m**$(\angle A) = 48°$

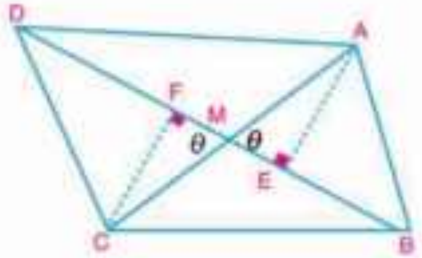
L'aire du triangle ABC = $\frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \sin 48 \simeq 40{,}13$ cm^2

⟶ 1 ÷ 2 × 9 × 1 2 × Sin 4 8 =

Essaye de résoudre

1. Calcule l'aire du triangle ABC dont BC = 16 cm, BA = 22 cm et $m(\angle B) = 63°$ à trois décimales près.

Calcul de l'aire d'un quadrilatère convexe



Dans la figure ci-contre:

ABCD est un quadrilatère dont $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$

$\overline{AE} \perp \overline{BD}$, $\overline{CF} \perp \overline{BD}$, θ est la mesure de l'angle compris entre les deux diagonales.

L'aire du quadrilatère = l'aire de $\triangle ABD$ + l'aire de $\triangle CBD$

$$= \frac{1}{2} BD \times AE + \frac{1}{2} BD \times CF$$

$$= \frac{1}{2} BD (AE + CF) \qquad = \frac{1}{2} BD (AM \sin\theta + CM \sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2} BD \times \sin\theta (AM + CM) = \frac{1}{2} BD \times AC \times \sin\theta$$

En général : l'aire du quadrilatère = demi produit des longueurs des deux diagonales par le sinus de l'angle compris entre ses diagonales:

Aire du quadrilatère = $\frac{1}{2}$ du produit des longueurs de ses diagonales × sinus de l'angle compris entre elles.

Réfléchis: Est-ce que l'aire change quand on utilise l'angle supplémentaire de θ ? Expliquez.

Exemple

2 Calculer, à $1cm^2$ près, l'aire d'un quadrilatère dont la longueur des diagonales 12cm, 16cm et l'angle compris entre les diagonales est 68°.

Solution

La formule de l'aire est:

L'aire du quadrilatère = $\frac{1}{2}$ produit des longueurs des 2 diagonales × sinus l'angle compris entre ses diagonales

$\therefore$ L'aire du quadrilatère $= \frac{1}{2} \times 12 \times 16 \times \sin 68° \simeq 89 \text{ cm}^2$

Essaye de résoudre

2 Calculer , à un décimal près, l'aire d'un quadrilatère dont les longueurs des diagonales sont 32 cm et 46 cm et l'angle compris entre elles, est 122°.

3 **Réflexion critique:** Calculer en utilisant la formule précédente l'aire de chacun de ce qui suit:

A Un carré de diagonale 10 cm de longueur.

B Un losange dont les longueurs des diagonales sont 8cm , 12 cm. Que remarques – tu?

Calcul de l'aire d'un polygone régulier

Figure (1) représente un polygone régulier, le nombre de ses côtés n , et x la longueur d'un côte.

Figure (2) représente l'un des triangles de la fig(1)

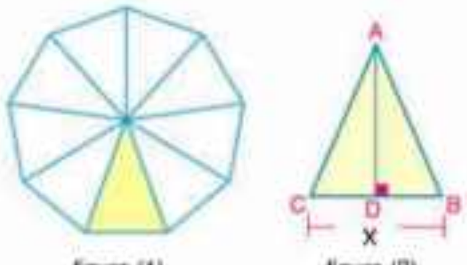


figure (1) figure (2)

$\because m(\angle BAC) = \frac{2\pi}{n}$ (pourquoi)?

$\therefore \text{cotg } \frac{\pi}{n} = \frac{AD}{BD}$ **ainsi.** $AD = BD \times \text{cotg } \frac{\pi}{n}$

$AD = \frac{1}{2} x \text{ cotg } \frac{\pi}{n}$ (tel que x est la longueur du côté)

L'aire du triangle $= \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} x \times \frac{1}{2} x \text{ cotg } \frac{\pi}{n}$

$= \frac{1}{4} x^2 \times \text{cotg } \frac{\pi}{n}$

L'aire d'un polygone régulier qui a un nombre de côté (n) et la longueur du côté $x = \frac{1}{4} nx^2 \times \text{cotg } \frac{\pi}{n}$

Exemple

3 Calculer , à deux décimales près, l'aire d'un polygone régulier de 8 côtés dont la longueur de l'un des côtés est 6 cm.

Solution

Formule l'aire du polygone régulier $= \frac{1}{4} n\, x^2 \times \text{cotg}\, \frac{\pi}{n}$

Par substitution n = 8, x = 6 cm:

$$\text{l'aire} = \frac{1}{4} \times 8 \times (6)^2 \times \text{cotg}\, \frac{180^\circ}{8}$$
$$= 72 \times \frac{1}{\tan 22.5^\circ} \simeq 173{;}8 \text{ cm}^2$$

Exprimentation orale:

En utilisant la formule précédente, trouve l'aire de chacun de ce qui suit :

1- Un triangle équilatéral **2-** Un carré **3-** un hexagone régulier

Essaye de résoudre

(4) Calculer, à trois décimales près, l'aire d'un pentagone régulier qui a la longueur du côté est 16 cm.

Activité

Utiliser le programme (GSP) gratuit SKETCHEXCHANGE de: http://www.keycurriculum.com/products/sketchpad

On utilise ce programme pour tracer les différentes figures géométriques et déterminer les longueurs des côtes:

1- On ouvre le programme comme dans figure ci-contre face.

2- On presse sur  et on choisit le caractère des figures et en pressant sur le mousse ou détermine les points de la figure.

3- On presse sur **A** et on écrit les lettres de la figure.

4- On presse sur  pour la transformation géométrique et le changement des dimensions.

5- On presse sur  pour tracer des segments ou des rayons dans la figure .

6- de Mesure on choisit le genre (périmètre , aire , longueurs, ...) .

7- Pour savoir plus on utilise (Help).

Résumé de l'unité

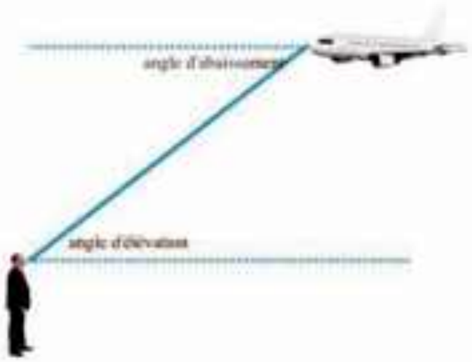
L'identité: est l'égalité pour toutes les valeurs réelles pour les deux membres.

Les identités de Pythagore : $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + tg^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + cotg^2\theta = cosec^2\theta$

Preuve de la vérité de l'identité: pour démontrer que l'identité est vraie, on prouve que les fonctions de 2 membres sont égales.

L'équation : l'équation est une égalité vraie pour quelques valeurs réelles et non vraie pour d'autres.

Angles d'élévation et angle d'abaissement:
L'angle d'élévation ou l'angle d'abaissement est l'union entre le rayon horizontal et le rayon du corps passant par l'oeil de l'observateur .
mesure de l'angle d'élévation = mesure de l'angle d'abaissement (alterne -internes).



Secteur circulaire: C'est une partie du cercle limitée par 2 rayons et un arc

L'aire du secteur circulaire

$= \frac{1}{2}\mathbf{r}^2\theta^{rad}$ (tel que θ^{rad} est l'angle du secteur et , $\mathbf{r}$ la rayon de son cercle)

$= \frac{x^\circ}{360^\circ} \times$ L'aire du cercle (tel que x° est l'angle du secteur en degrés)

$= \frac{1}{2}\, l\, \mathbf{r}$ (tel que l est la longueur de l'arc, r est la longueur du rayon de son cercle)

Segment circulaire : une partie du cercle limitée par un arc et une corde.

L'aire du circulaire c'est $= \frac{1}{2}\mathbf{r}^2(\theta^{rad} - \sin\theta)$

(tel que θ est l'angle central du segment et, $\mathbf{r}$ est le rayon de son cercle).

L'aire du triangle $= \frac{1}{2}$ base × hauteur correspondante

$= \frac{1}{2}$ produit des longueurs de deux côtés x sinus de l'angle compris entre eux

L'aire d'un quadrilatère $= \frac{1}{2}$ product des longueurs de 2 diagonales × sinus de l'angle compris entre elles

L'aire d'un polygone régulier $= \frac{1}{4} nx^2 \times cotg\,\frac{\pi}{n}$

(tel que n nombre des côtés, x longueur du côté)

Mathématiques

Livre des activités et des exercices

Première secondaire deuxième semestre

Algèbre

Unité 1

Matrices

Leçons de l'unité

1 - 1 Organisation des informations en utilisant des matrices

① A, B, C, D sont quatre villes, si la distance en kilomètres entre chaque deux villes est représentée dans le tableau ci–contre.

	A	B	C
A	0	75	80
B	75	0	56
C	80	56	0

A Ecrire une matrice qui représente ces informations.

B En supposant que X est la matrice demandée en (A).

Trouver ce qui suit :

1- X_{23}, que veut dire ceci ? ____________

2- X_{32}, que veut dire ceci ? ____________

3- Quelle est la relation entre x_{23} et x_{32}? ____________

C Ecrire tous les éléments de la deuxième ligne de la matrice X. ____________

D Ecrire tous les éléments de la deuxième colonne de la matrice X.

Qu'est ce que tu déduis des points 4 , 5?

____

E Trouver X_{ij} quand i=j = 1, 2, 3. Qu'est ce que tu remarques ? ____________

F Compléter ce qui suit :

1- X est une matrice de dimension ____________

2- $x_{ij} = x_{ji}$ pour toutes les valeurs ____________

② Quel est le nombre d'éléments dans chacune des matrices suivantes ?

A Matrice de dimension 2×3 ____________

B Matrice de dimension 2×2 ____________

C Matrice de dimension 3×2 ____________

③ Trouver les valeurs a, b, c et d sachant que :

A $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ a-3 & 3d-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 & 2b+1 \\ c & 16 \end{pmatrix}$ ____________

B $\begin{pmatrix} 15 & 2b \\ 0 & 2a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a & 10 \\ 2b-d & 10 \end{pmatrix}$ ____________

④ **Le lien à l'industrie:** Le tableau ci–contre montre le nombre d'usines privées qui travaillent dans le domaine nutritifs et les industries de cuir dans trois villes différentes parmi les villes de quelques gouvernorats de la République Arabe d'Egypte.

La ville	Industrie alimentaire	Industrie du cuir
6 Octobre	44	68
Ville El Sadat	28	52
El Asher de Ramadan	37	14

A Organiser les données dans une matrice.

____

B Additionner les éléments de chaque colonne, quelle est ton interprétation aux résultats que tu as obtenu?

C Additionner les éléments de chaque ligne. Est-ce que les résultats que tu as obtenu peuvent nous fournir des informations qui ont un sens ? vérifier ta réponse.

5 Trouver la valeur de chacun de a, b sachant que $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2a-1 & 3b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

6 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2d & -1 \\ 3e & 4 \end{pmatrix}$ et $A = {}^tB$,

trouver les valeurs de d et e.

7 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \\ -4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$,

trouver $A+B$, $A-B$, $A+2B$, $B-3A$

8 **Réflexion critique :** Si $A = (a_{ij})$ pour chaque éléments de $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Ecrire la matrice sachant que $A_{ij} = j - i$, puis trouver ${}^tA$

Activité

En utilisant des informations de la vie courante, construire une matrice dont les sommes des éléments de ses colonnes ont de sens et les sommes des éléments de ses lignes n'ont pas de sens. Insérer les données de cette matrice dans le programme d'Excel et vérifier les sommes obtenues. Quel est le sens des sommes des colonnes?.

1 - 2 Addition et soustraction des matrices

① Si $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ et $K_1 = 2$, $K_2 = -1$, trouver chacune des matrices suivantes : K_1A, K_2A

② Si $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -5 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 0 & 7 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$, trouver les résultats des opérations suivantes s'il est possible, en citant la raison en cas de l'échec de l'opération.

A $A + B$ **B** $A + {}^tB$ **C** ${}^tA + B$

③ Si $X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$, trouver la matrice $3X - Y + Z$

④ Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ 2 & -4 & 8 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 4 & -10 & 0 \\ -1 & 8 & -4 \end{pmatrix}$,

trouver la matrice X de façon que $X = 2A - 3B$

⑤ **Réflexion critique :** Trouver les valeurs a, b, c et d qui approuvent l'équation :

$$2\begin{pmatrix} a & 3 \\ 6 & b \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} a & d \\ c & -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} c & 3 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

⑥ **Problème ouvert :** Choisir de chez toi deux matrices A, B qui ont les mêmes dimensions, puis prouver que :

A $A - B = A + (-B)$ **B** ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$ **C** ${}^t(A - B) = {}^tA - {}^tB$

Activité

① D'après les situations de notre vie courante, écrire un problème dont on peut résoudre en utilisant l'addition ou la soustraction des matrices.

② Rechercher dans la bibliothèque scolaire ou sur le réseau de l'internet des applications des matrices dans d'autres sciences.

Multiplication des matrices 1 - 3

1. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$, trouver chacun de ce qui suit :

   A AB

   B BA

   C (A + B)A

2. Si $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 7 \\ 3 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 11 & 18 \end{pmatrix}$, trouver la valeur de chacun de x et y.

3. **Réflexion critique :** Si A , B sont deux matrices, $\boxed{}$ est la matrice nulle et AB = $\boxed{}$.
   Est – ce que cela veut dire toujours que A = $\boxed{}$ ou B = $\boxed{}$?
   Vérifier avec $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. **Le lien au tourisme :** Dans les repas de déjeuner et de diner, l'un des hôtels dans la ville touristique d'Hurgada consomme les quantités suivantes de viandes, de légumes et de fruits en kilogrammes selon le tableau suivant :

	Viandes	Légumes	Fruits
Le repas de déjeuner	200	100	150
Le repas de diner	120	80	100

Si le prix d'un kilogramme de viande est 65 LE, le d'un kilogramme de légume est 4 LE et d'un kilogramme de fruit est 5 LE, trouver, en utilisant la multiplication des matrices, le coût total des deux repas.

1 - 4 Déterminants

1 Trouver la valeur de chacun des déterminants suivants :

A $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ **B** $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$ **C** $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 19 & -7 \end{vmatrix}$

D $\begin{vmatrix} a+x & a \\ b+y & b \end{vmatrix}$ **E** $\begin{vmatrix} x+1 & x^2+1 \\ y+1 & y^2+1 \end{vmatrix}$ **F** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

G $\begin{vmatrix} 0 & 42 & 3 \\ 2 & 18 & 7 \\ 0 & 28 & 3 \end{vmatrix}$ **H** $\begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & 0 & -31 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **I** $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2 Résoudre chaque système des équations linéaires suivantes par la méthode de Cramer :

A $2x - 3y = 5$
$3x + 4y = -1$

B $x + y = 5$
$2x + 5y = 16$

C $x + 3y = 5$
$2x + 5y = 8$

D $3x + 2y = 5$
$2x + y = 3$

E $3x = 1 - 4y$
$5x + 12 = 7y$

F $2x = 3 + 7y$
$y = 5 - x$

G $2x + y - 2z = 10$
$3x + 2y + 2z = 1$
$5x + 4y + 3z = 4$

H $x + 2y - 3z = 6$
$2x - y - 4z = 2$
$4x + 3y - 2z = 14$

I $y + 2x + 3z = 6$
$2x - y + z = -3$
$x - 2y + 2z = -11$

3 Le lien à la géométrie : Trouver l'aire du triangle ABC dont les sommets sont :
A(2; 4) , B (−2; 4) et C(0; −2).

4 Trouver l'aire du triangle XYZ dont les sommets sont X (3; 3), Y (−4; 2), et Z (1; −4).

5 En utilisant les déterminants, prouver que les points (3; 5), (4; 6) et (5; 7). sont alignés.

Activité

6 Une autre méthode pour trouver la valeur du déterminant $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 6 & 25 & 11 \\ 7 & 52 & 21 \end{vmatrix}$

✔ Remarquer que nous avons écris les trois colonnes du déterminant, puis nous avons répété les deux premières colonnes.

✔ Dessiner des lignes dia–métriques à travers chaque trois éléments comme le démontre les flèches pointillées. Les termes formés de chaque ligne sont des termes déviantes et les flèches qui se dirigent vers le bas, leurs termes correspondants sont positives tandis que celles qui se dirigent vers le haut sont négatives.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 7 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 25 & 11 & 6 & 25 \\ 7 & 52 & 21 & 7 & 52 \end{array}$$

Le déterminant $= 5 \times 25 \times 21 + 7 \times 11 \times 7 + 4 \times 6 \times 52 - 7 \times 25 \times 4 - 52 \times 11 \times 5 - 21 \times 6 \times 7$

$= 2625 + 539 + 1248 - 700 - 2860 - 882$

$= -30$

Essaie de résoudre

Utiliser la méthode précédente pour développer chacun des déterminants suivants et trouver sa valeur :

A $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 11 & 9 & 13 \\ 15 & 17 & 19 \end{vmatrix}$ **B** $\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$

C $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ **D** $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -3 \\ 2 & 7 & -31 \\ 5 & -9 & 2 \end{vmatrix}$

Vérifier ta réponse en trouvant la valeur de chaque déterminant par la méthode actuelle. Comparer tes résultats.

1 - 5 Inverse de la matrice

1 Déterminer les matrices qui ont un inverse et les matrices qui n'ont pas d'inverse dans ce qui suit, et trouver l'inverse s'il existe.

A $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ **C** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **D** $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

E $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ **F** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **G** $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ **H** $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

2 Trouver la valeur de "a" pour chacune des matrices suivantes ait un inverse.

A $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} a & 9 \\ 4 & a \end{pmatrix}$ **C** $\begin{pmatrix} a & 4 \\ 2 & a-2 \end{pmatrix}$ **D** $\begin{pmatrix} a-1 & -2 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$

3 Si $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prouver que $X^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

4 Trouver la matrice A sachant que : $A \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5 Si $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, prouver que = $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$

6 Résoudre chaque système des équations linéaires suivantes, en utilisant les matrices, puis vérifier ta réponse :

A $4x + 3y = 26$, $5x - y = 4$

B $2x - 7y = 3$, $x - 3y = 2$

C $2x = 3 + 7y$, $y = 5 - x$

D $2y = 5 - x$, $2x = 3 - y$

7) **Le lien à la géométrie :** La droite d'équation $y + a x = c$ passe par les deux points (1; 5) et (3; 1). Utiliser les matrices, pour trouver les valeurs des constants a et c .

8) **Le lien à la vie :** Un motocycliste achète 24 litres d'essence et 5 litres d'huile à 56 LE pour remplir sa moto. Tandis qu'un autre motocycliste achète 18 litres d'essence et 10 litres d'huile à 67 LE pour remplir sa moto. Utiliser les matrices pour trouver le prix d'un litre d'essence et le prix d'un litre d'huile sachant que les deux hommes utilisent les même genre d'essence et d'huile.

9) **Le lien à la géométrie :** La courbe $y = a x^2 + bx$ passe par les deux points (2; 0) et (4; 8). Utiliser les matrices, pour trouver les deux constants a et b.

10) **Réflexion critique :** La moitié de la différence entre deux nombres est 2. La somme du grand nombre et le double du petit nombre est 13. En utilisant les matrices, trouver les deux nombres.

Activité

Ecrire un problème dont la solution nécessite une remobilisation en système d'équations , puis résoudre ce système en utilisant les matrices.

Exercices généraux

Premièrement : Compléter ce qui suit :

① Si $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B = (2 \ \ 5)$, alors ${}^t(BA) =$ ____________________

② Si $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & x \end{pmatrix} = I$, alors $x =$ ____________________

③ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, alors $A^2 =$ ____________________

Deuxièmement : Questions à choix multiples :

④ Si A et B sont deux matrices dont $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, alors ${}^tB\,{}^tA =$ ____________________

A $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ **C** $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ **D** $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

⑤ Si: $\begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ -3 & x+2 \end{vmatrix} = 1$, alors $x =$ ____________________

A -3 **B** 3 **C** ± 3 **D** ± 4

⑥ Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A Quelle est la dimension de la matrice A ? ____________________

B Ecrire les éléments de la première ligne. ____________________

C Ecrire les éléments de la troisième colonne. ____________________

D Ecrire les éléments : a_{11}, a_{22}, a_{13}, a_{12} ____________________

⑦ Exprimer les coordonnées de chacun des points suivants par une matrice de dimension 1×2
A (2; 3) , B (−1; 0) et C(−2; −3)

____

⑧ Quel est le nombre d'éléments dans chacune des matrices suivantes ?

A La matrice de dimension 3×2 ____________________

B La matrice carrée de dimension 2×2. ____________________

⑨ Résoudre chacune des équations suivantes :

A $\begin{pmatrix} x+5 \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$ ____________________

B $\begin{pmatrix} a-3b & b \\ b+a & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ ____________________

Exercices généraux

10 **Le lien à l'industrie :** Une usine qui fabrique les écrans de télévisions produit trois genres 32 pouces, 42 pouces, 48 pouces et l'usine a deux branches A, B. le nombre d'écrans que chaque branche a produit durant les mois de Janvier et de Février 2013 est démontré dans les deux tableaux aux suivants. Exprimer la production de l'ensemble dans les deux mois en utilisant les matrices

	32pouces	42 pouces	48 pouces
A	850	700	600
B	750	600	550
	Le mois de Janvier 2013		

	32pouces	42 pouces	48 pouces
A	800	650	550
B	840	700	600
	Le mois de Février 2013		

11 Résoudre l'équation : $A + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

12 Trouver a, b, c et d sachant que

A $\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

B $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13 Si : $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, trouver :

A $2X + 3Y - 2I$

B $X - (Y - 5I)$

14 Trouver x et y sachant que : $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

15 Montrer si chacun des matrices suivantes a un inverse, puis trouver-le

A $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **C** $\begin{pmatrix} a & -b \\ a & b \end{pmatrix}$ **D** $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

16 Résoudre chaque système des équations linéaires suivantes, en utilisant les matrices

A $x + y = 3$
$x - y = 5$

B $2x - 3y - 3 = 0$
$5x + 4y - 19 = 0$

C $y = 11 - 5x$
$x = 3 - 5y$

Epreuve de l'unité

17 Si $(AB)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, trouver B^{-1}.

---

18 Trouver la valeur de chacun des déterminants suivants :

A $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ **B** $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$ **C** $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ **D** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

19 Résoudre chacun des systèmes d'équations suivantes par la méthode de Cramer

A $2x - 4 = -y$
$y = 3x - 6$

B $3x + y = 5$
$2x + 3y = 8$

C $x - 2y - z = 0$
$x + y - 2z = -1$
$-x + 4y + 7z = 6$

D $3x = 2y + 3 + z$
$2x - y + 4 = z$
$y + z = -x + 3$

20 Utiliser les matrices A, B et C pour déterminer si tout ce qui suit est juste ou faux .
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

A $A(BC) = (AB)C$. **B** $A(B + C) = AB + AC$.

21 Résoudre le système des deux équations suivantes en utilisant les matrices
$5y = 1 - 2x$, $3x = 2 - 7y$

22 Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, trouver chacun de ce qui suit :

A AB **B** BA **C** A^2

D B^2 **E** ${}^tAB$ **F** $A{}^tB$

Épreuve cumulative

1 Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$.

A déterminer $A + 2B - 3C$ **B** déterminer chacune des deux matrices : AB , BA

C Vérifier que : $A(B + C) = AB + AC$ **D** Vérifier que : ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

2 Une librairie vend 3 groupes de disques compacts CD, le tableau suivant montre le coût de chaque groupe et le prix de vente. Si la librairie vend 40 disques pour des sujets scientifiques, 64 disques pour des sujets culturels, 45 disques pour des histoires mondiales,

Genre de groupe de disques compacts	Prix de coût	Prix de vente
Scientifique	80	100
Culturel	65	85
Histoires mondiales	90	110

A organiser les détails dans deux matrices, puis utilise la multiplication des matrices pour trouver le coût total des disques compacts.

B utiliser la multiplication des matrices pour trouver la somme totale que recevra la librairie de la vente des disques compacts signalés.

C utiliser les opérations sur les matrices pour trouver le gain de la librairie de la vente des groupes de disques signalés.

3 Utiliser la méthode de Cramer pour résoudre chacun des systèmes suivants :

A $x + y = 4$
$2x - y = 1$

B $3x - y + 5 = 0$
$x + 2y + 1 = 0$

C $2x + y - z = 3$
$-3x + 2y + z = 4$
$4x + 2y - z = 8$

4 Montrer si chacune des matrices suivantes a un inverse ou non. En cas si elle a un inverse, trouver-le :

A $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ **C** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ **D** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

5 Résoudre chacun des systèmes suivants en utilisant les matrices :

A $x + 2y = 8$
$2x - y = -9$

B $3x - y = 0$
$5x + 2y = 22$

C $4x = -6y$
$8x - 7 = 2y$

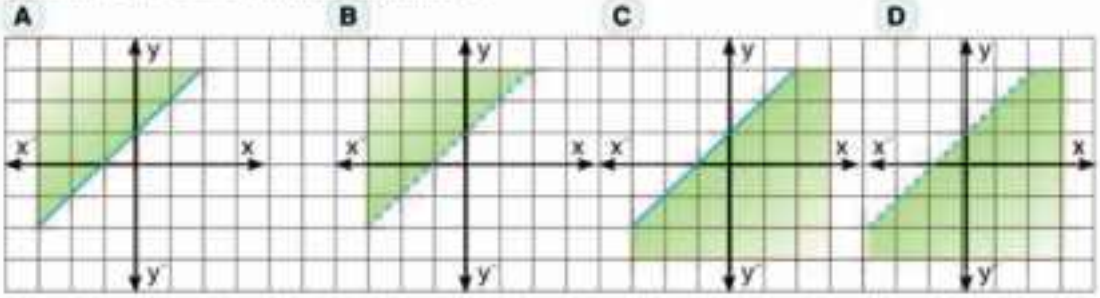
6 Résoudre le système d'équations suivant en utilisant la méthode de Cramer .

A $3y = 1 + z - x$, $2x = -2y + z$, $3x + y + 2z = -1$

B Khaled a 25 pièces de monnaie des quarts et des moitiés d'une Livre formant une somme de 8,5 Livres. Utiliser les matrices pour trouver le nombre de quart et le nombre de moitié qu'il possède.

2 - 1 Inéquations linéaires

1 Joindre chaque inéquation à son graphique qui représente l'ensemble solution, (vérifier le point (0; 0) dans chaque inéquation).



1- $y \geqslant x + 1$ **2-** $y < x + 1$ **3-** $y > x + 1$ **4-** $y \leqslant x + 1$

2 Choisir le point qui vérifie l'inéquation :

A $y \geqslant 2x + 3$ [(0; 1) , (3; 9) , (−1; 0)] ……………………

B $y < 2x + 3$ [(0; 1) , (3; 9) , (−1; 0)] ……………………

3 Trouver l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes :

A $y \leqslant x + 2$ **B** $y > 2x - 3$ **C** $x + 3y \leqslant 6$

……………………………………………………

……………………………………………………

4 Lien avec le consommateur: Supposons que, tu veux décorer ta classe pour une fête. Le prix d'un papier de feuilles dorées est 5 LE, le prix d'un paquet de feuilles bleues est 3 LE. Si tu veux dépenser au plus 48 LE pour acheter des feuilles de décoration, combien de rouleaux de chaque sorte tu peux acheter? Justifie. ……………………

……………………………………………………

Activité (1)

Explique à ton camarade– qui était absent comment représenter l'inéquation $x - y \geqslant 2$ graphiquement et comment vérifier la réponse.

Activité (2)

Technologie **Les outils utilisés: Une calculatrice graphique**

Tu peux utiliser le mode Draw dans ta calculatrice graphique pour tracer les inéquations. Si tu veux hachurer au-dessus de la droite y_1 , tu utilises (y_{min}, y_1), si tu veux hachurer au – dessous de la droite y_1 , tu utilises (y_1, y_{max}) pas besoin d'utiliser les parenthèses avant d'appuyer ENTER

Exemple

5 Représenter chaque inéquation graphiquement:

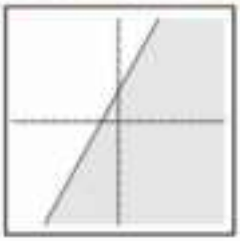
A $y < 2x + 3$

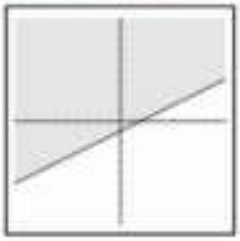
hachurer au-dessous de la droite frontière y_1

B $y > 0{,}5x - 1$

hachurer au –dessus de la droite frontière y_1

A		B
Y= 2 X,T,θ + 3	← introduire l'équation de la droite frontière →	Y= 0 . 5 X,T,θ − 1
2nd Draw 7	← Introduire la propriété d'hachurer →	2nd Draw 7
VARS 1 4 ;		2nd Y-VARS 1 1 ;
2nd Y-VARS 1 1 ENTER	← inter (y_{min}, y_1) inter (y_1, y_{max}) →	VARS 1 5 ENTER





- On peut contrôler le degré d'hachurassions en faisant introduire un nombre entier de Dark 1 à light 8. Ajouter une virgule et le nombre entier avant de d'appuyer sur la clé ENTER
- La calculatrice ne fait par la distinction entre la droite frontière en pointillés ou par un trait plein en dessinant l'inéquation dans ton cahier.

Essaye de résoudre

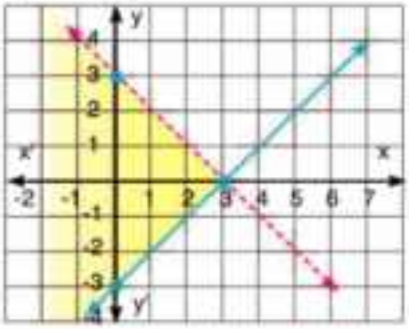
1 En utilisant la calculatrice graphique , tracer chacune des inéquations suivantes :

A $y < x$ B $y > 2x + 1$ C $y \geqslant -x + 3$

D $y \leqslant 5$ E $x - y \geqslant 4$ F $2x - 3y \leqslant 12$

2 - 2 Résolution des systèmes d'inéquations graphiquement

(1) Dans la figure ci-contre, choisir le système représenté par la région de la solution:



A $x + y \leqslant 3$

$y > x - 3$

B $x + y > 3$

$y \leqslant x - 3$

C $x + y \geqslant 3$

$y < x - 3$

D $x + y < 3$

$y \leqslant x - 3$

(2) Résoudre chacun de ces systèmes d'inéquations graphiquement :

A $x \leqslant 4$

$y < x + 2$

$x + 2y \geqslant -2$

B $y - x > 0$

$2x + 2y \leqslant 12$

$y < 6 + 2x$

C $x + 4y > 4$

$4x + y \geqslant 2$

$x - y < 1$

---

(3) M. Karim a donné 60 minutes à ses élèves pour un examen de mathématiques, les élèves doivent répondre à 5 questions au moins de la section A, 3 questions au moins de la section B de façon qui il faut répondre à 10 questions au moins des 2 sections . Hanaa a mis 4 minutes pour répondre à chaque question de la section A et 5 minutes pour chaque question de la section B. Combien de questions de chaque section Hanaa a pu résoudre?

(4) **Réflexion critique:**

A Écrire un système d'inéquation tel que la solution est une ligne droite. ____________

B Sans tracer, montrer pourquoi le point d'intersection des 2 droites frontières: $2x + y > 2$; $x - y \geqslant 3$: $2x + y > 2$; $x - y \geqslant 3$ n'est pas de solution de ce système ? ____________

Activité

(5) Écrire un problème de chez toi formé d'un système de 2 inéquations à deux inconnues, puis résoudre ce système.

Programmation linéaire et Optimisation

2 - 3

(1) Choisir la bonne réponse parmi les réponses données :

A Le point qui appartient à l'ensemble solution des inéquations : $x > 2$, $y > 1$, $x + y \geqslant 3$ est : ____________________

[(3; 1) , (1; 2) , (3; 2) , (1; 3)]

B Le point où la fonction $R = 40x + 20y$ est maximale est : ____________________

[(0; 0) , (0; −4) , (15; 10) , (25; 0)]

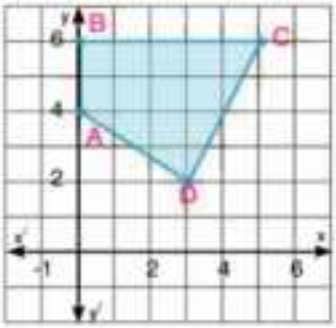
C Le point où la fonction $R = 35x + 10y$ est minimale est: ____________________

[(0; 0) , (0; 10) , (0; 40) , (20; 10)]

(2) Dans le graphique ci-contre, trouver les valeurs de x et y qui minimisent la fonction objective $R = 3x + 2y$, puis trouver la valeur de cette fonction .

____

____



(3) Représenter chacun de ces systèmes graphiquement, puis trouver la valeur maximale ou minimale de la fonction objective donnée.

A $x + y \leqslant 5$
$y \geqslant 1$
$x \geqslant 2$
valeur minimale de $R = 2x + 3y$

B $2x + y \leqslant 6$
$x \geqslant 1$
$y \geqslant 2$
valeur maximale de $R = 2x + 3y$

(4) **Lien à l'industrie:** Une usine produit une crème adoucissante pour la peau pour fabriquer une crème normale il faut $2cm^3$ huile et, $1cm^3$ de beurre de cacao; Pour fabriquer une crème luxe il faut $1cm^3$ huile et $2cm^3$ de beurre de cacao . le bénéfice de la crème normale est 10 LE , le bénéfice de le crème luxe est 8 LE. la quantité stockée est $24\ cm^3$ huile, et $18cm^3$ de beurre de cacao combien de crème de chaque sorte faut-il produire pour réaliser le bénéfice maximum et calcul ce bénéfice?

____

____

____

5 **Lien aux métiers:** Un artisan dispose de 10 mètres de lin et 6 mètres de coton, il peut fabriquer 2 modèles de vêtements, pour le 1 er modèle, il lui faut 1m de lin et 1m de coton et son bénéfice est 3 LE. pour le 2 ème modèle il lui faut 2m de lin et 1m de coton et son bénéfice est 4 LE. Combien de vêtements de chaque modèle faut-il fabriquer pour obtenir un revenu maximal ? ______________________

____

6 **Lien à la musique:** Une usine produit 2 genres de trompettes. Pour le 1er il faut 25 unités de cuivre et 4 unités de nickel , le 2^e : 15 unités du cuivre et 8 unités de nickel. L'usine dispose de 95 unités de cuivre et 32 unités de nickel . Le bénéfice du 1^{er} genre est 60 LE, celui du 2^e est 48 LE. Combien de trompette de chaque sorte doit-on produire pour réaliser un bénéfice maximum?

____

____

7 **Lien au tourisme:** Une compagnie de tourisme veut transporter 1600 touristes et 900 tonnes de valises avec le moindre coût, 2 avions A et B sont proposés : 12 avions de A et 9 avions de B . L'avion A peut transporter 200 personnes et 6 tonnes de valises, l'avion B peut transporter 100 personnes et 16 tonnes de valises . L'avion A est loué à 320.000 LE et l'avion B à 150.000 LE. Combien d'avions de chaque sorte faut-il utiliser

____

____

Activité

8 En t'aidant de la bibliothèque ou de l'internet . Écrire un exemple de programmation linéaire en lien avec:

A L'économie **B** L'industrie **C** gestion **D** recherches scientifiques

____

9 Écrire un problème dans lequel il faut 4 inéquations pour la solution , puis représente la région solution graphiquement . Écrire la fonction objective, puis déterminer sa valeur maximale et minimale .

____

____

Exercices Généraux

1 Vérifier si les phrases suivantes sont vraies ou fausses . Si la phrase est fausse justifier; si elle est vraie donne un exemple qui le démontre .

A Si a, b $\in$ R , a $>$ b et a, b sont positifs, alors $a^2 > b^2$. ( ) ______

B Si a, b $\in$ R , a $>$ b et a, b sont négatifs, alors $a^2 > b^2$. ( ) ______

C Si a, b $\in$ R , a $>$ b et a, b ont même signe , alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ( ) ______

D Si a, b $\in$ R , a $>$ b et a, b ont signes contraires , alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ( ) ______

2 Résoudre les inéquations suivantes et représenter la solution sur une droite graduée :

A $2x + 4 < 5x - 5$ ______

______

B $7 < 5x + 2 \leqslant 12$ ______

______

3 Représenter graphiquement l'ensemble solution des inéquations suivantes :

A $y \leqslant 2x + 1$ **B** $y \geqslant -x - 4$ **C** $y < -2x + 3$

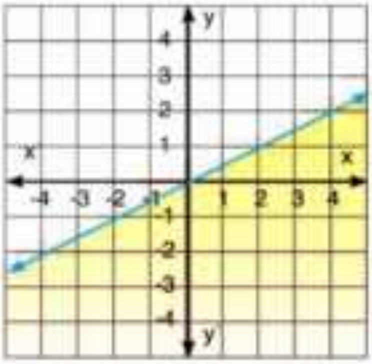
4 **Choix multiple:**

Choisir l'inéquation dont la partie

colorée représente sa solution :

A $y \geqslant \frac{1}{2}x$ **B** $y > \frac{1}{2}x$

C $y \leqslant \frac{1}{2}x$ **D** $y < \frac{1}{2}x$



5 **Vrai ou faux:**

Le système formé de 2 inéquations a une infinité de solutions ou bien aucune solution " justifie ta réponse .

6 Représenter l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes graphiquement :

A $x \geqslant -3$

B $x - 3y \geqslant 6$

7 Trouver la valeur maximale de la fonction $R = 2x + y$ sous ces contraintes:

$x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x + 3y \leqslant 18$, $-4x + y \geqslant -8$.

Epreuve de l'unité

8 Représenter l'ensemble solution de chacune des inéquations suivantes graphiquement :

A $x + y \geqslant 2$ **B** $x + 3y \leqslant 6$ **C** $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \geqslant \frac{3}{4}$

D $4y > 6x + 2$ **E** $2x + 3y < 6$ **F** $4x - 2y \geqslant 8$

9 Résoudre chacun de ces systèmes graphiquement :

A $y \geqslant 2x - 1$, $x \geqslant 2$

B $3x + 2y \leqslant 12$, $x - y \leqslant 3$

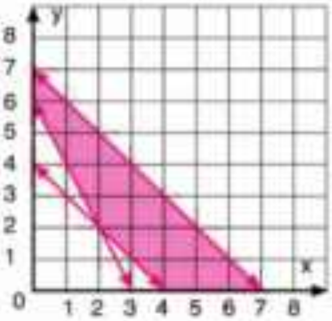
C $y > 4x - 1$, $y \leqslant -x + 4$

D $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 2y > 4$, $4x + y > 9$

E $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y - x \leqslant 1$, $4x + 3y \leqslant 12$

F $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y < 8$, $x + 2y < 11$

10 Dans la figure ci – contre : Trouver la valeur du x et y qui font que la fonction $R = \frac{1}{2}x + y$ ait une valeur minimale.



11 **Lien à l'industrie :** Une petite fabrique des plats métalliques fabrique deux genres de plats. Pour fabriquer le 1^{er}. genre A on a besoin de 10 minutes sur la $1^{ère}$ machine et 12 minutes sur la $2^{ème}$, pour fabriquer le $2^{ème}$ genre B on a besoin de 15 minutes sur la $1^{ère}$ machine et 10 minutes sur la $2^{ème}$. Le bénéfice du plat A est 4 LE , celui du plat B est 5 LE. Combien de plats de chaque genre faut– il fabriquer pour réaliser le bénéfice maximum sachant que l'atelier travaille 8 heures.

Épreuve Cumulative

1 Résoudre chacun de ces systèmes graphiquement :

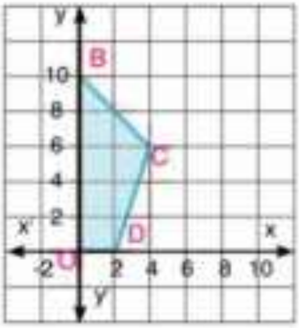
A $x - 2y < 3$, $2x + y > 8$

B $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 5$, $4x + y \leqslant 8$

2 Calculer les valeurs maximale et minimale de la fonction $R = 4x + y$ sous les contraintes:
$x + y \leqslant 6$, $2x + y \geqslant 10$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

3 **Lien à la santé:** En pratiquant le sport de marche à pieds Sami brûle 4 calories / minute; en courant il brûle 10 calories / minutes Sami peut marcher entre 10 et 20 minutes / jour et peut courir entre 30 et 45 minute / jour . Il ne peut pratiquer plus qu'une heure de sport / jour. Quel est le temps que doit consommer Sami dans chaque sport pour brûler le maximum de calories?

4 **Dans la figure ci-contre :** Trouver les valeurs de x et y qui font que la fonction: $R = 2x + 3y$ ait une valeur maximale et déterminer cette valeur.



5 **Lien à l'industrie:** Un petit artisan de meubles peut fabriquer 2 modèles de chaises , un modèle de luxe et un modèle économique Il faut 3 heures de travail de la machine A et 2 heures de travail de la machine B pour fabriquer un modèle de luxe et 2 heures de travail de le machine A et 3 heures de travail de la machine B pour fabriquer un modèle économique. Un modèle de luxe donne 20 L.E de bénéfice et un modèle économique 12 L.E de bénéfice. Combien de chaise de chaque modèle faut. il fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal sachant que l'artisan ne travaille pas plus que 14 heures par jour.

3 - 1 Quantités scalaires , quantités vectorielles , segment orienté

1 **Compléter les phrases suivantes pour qu'elles soient correctes**

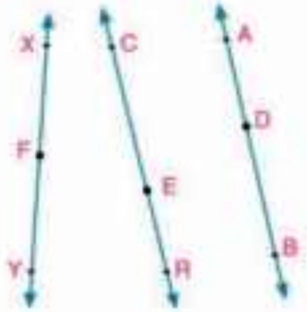
A La quantité scalaire est complètement déterminée par ....

B La quantité vectorielle est complètement déterminée par ....

C Le segment orienté est déterminée par ...., ..., ...

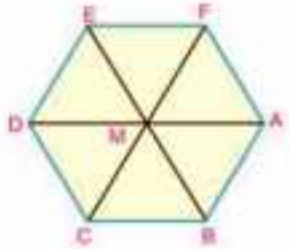
D Deux segments orientés sont équivalents si ....

2 **Dans la figure ci-contre:** $\overleftrightarrow{AB}$ est parallèle à $\overleftrightarrow{CE}$ et chacune d'elles n'est pas parallèle à $\overleftrightarrow{XY}$. Joindre les phrases suivantes à ce qui leur convient .



A $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$	**1-** Même sens	**B** $\overrightarrow{FX}$, $\overrightarrow{XY}$
C $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{ER}$	**2-** Sens différent	**D** $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AB}$
E $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{YF}$	**3-** Sens contraire	**F** $\overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{XY}$

3 ABCDEF, hexagone régulier de centre M. Compléter ce qui suit



A $\overrightarrow{AB}$ est équivalent à ...., ... et ....

B $\overrightarrow{MD}$ est équivalent à ...., ... et ....

C $\overrightarrow{CD}$ est équivalent à ...., ... et ....

4 Les diagonales du carré ABCD se coupent en M, déterminer tous les segments orientés équivalents dans la figure.

....

5 Sur un repère orthonormé : A(4; −3) , B (4; 4), C (−3; −1) tels que les segments orientés $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{NO}$ sont équivalents tels que O est le point d'origine. Trouver les coordonnées des points D, M et N.

....

(6) Dans un repère orthonormé : A(3; −2), B (6; 2) , C (1; 3) et D (4; 7) :

A Trouver $\| \overrightarrow{AB} \|$, $\| \overrightarrow{CD} \|$

B Prouver que : $\overrightarrow{AB}$ est équivalent à $\overrightarrow{CD}$

C Si les segments orientés $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{OR}$ sont équivalents, trouver les coordonnés des points M, N et R tels que O est le point d'origine.

(7) Dans un repère orthonormé : A(2; 3) , B (−3; 1) et C (5; −1)

A Tracer $\overrightarrow{CD}$, équivalent à $\overrightarrow{AB}$, puis déterminer les coordonnées du point D.

B Trouver les coordonnées du point M, milieu $\overrightarrow{BC}$, puis déduire les segments orientés équivalents à :

Premièrement: $\overrightarrow{BM}$ **Deuxièmement :** $\overrightarrow{AM}$ **Troisièmement:** $\overrightarrow{AC}$ **Quatrièmement:** $\overrightarrow{DB}$

C Est – ce que la figure ACDB est un parallélogramme ? justifier.

3 - 2 Vecteurs

① Dans un repère orthonormé : A(3; −4) , B (−12; 5) , C (−3; −6). Trouver le vecteur de position de chacun des points A, B, C par rapport au point d'origine O (0; 0), puis calculer la norme de chaque vecteur.

② Exprimer les vecteurs suivants en fonction des vecteurs unitaires de base, puis calculer la norme de chacun :

A $\vec{M} = (-4; -3)$ **B** $\vec{N} = (8; -6)$

C $\vec{F} = (-5; -12)$ **D** $\vec{A} = (0; 2\sqrt{2})$

E $\vec{B} = (-3\sqrt{3}; 0)$ **F** $\vec{C} = (\sqrt{2}; -3\sqrt{2})$

③ Écrire les vecteurs suivants sous forme polaire :

A $\vec{M} = 8\sqrt{3}\,\vec{i} + 8\,\vec{j}$

B $\vec{N} = 3\sqrt{2}\,\vec{i} + 3\sqrt{2}\,\vec{j}$

④ Si $\vec{A} = (3; -2)$, $\vec{B} = (-2; 5)$ et $\vec{C} = (0; 11)$:

A Écrire chacun des vecteurs suivants en fonction des vecteurs unitaires de base :
$2\vec{B}$, $3\vec{C}$, $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}$, $\frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{C})$

B Exprimer $\vec{C}$ en fonction de $\vec{A}$ et $\vec{B}$

⑤ Exprimer sous la forme des vecteurs unitaires de base:

A Vitesse uniforme 60 km/h dans la direction Ouest.

B Force 20 kgp . agit sur un corps dans la direction 30° Sud-Est

C Déplacement d'un corps à 40 cm dans la direction Nord- Ouest

6 Si $\overrightarrow{M} = (5; 1)$, $\overrightarrow{N} = (4; -20)$ et $\overrightarrow{L} = (-10; -2)$, démontrer que :

A $\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{N}$ **B** $\overrightarrow{M} \,//\, \overrightarrow{L}$ **C** $\overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{L}$

7 Si $\overrightarrow{M} = 3\,\overrightarrow{i} + 4\,\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{N} = -6\,\overrightarrow{i} - 8\,\overrightarrow{j}$

$\overrightarrow{L} = a\,\overrightarrow{i} - 8\,\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{F} = 4\,\overrightarrow{i} + b\,\overrightarrow{j}$

A Montrer que $\overrightarrow{M} \,//\, \overrightarrow{N}$

B Trouver $a \in R$, sachant que $\overrightarrow{M} \,//\, \overrightarrow{L}$

C Trouver $b \in R$, sachant que $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{N}$

D Est-ce que $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{M}$? Justifie ta réponse

8 Dans le diagramme ci-contre, il y a des parallélogrammes superposables. Exprimer les segments orientés en fonction de $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{N}$.

A $\overrightarrow{AB}$ ________ **B** $\overrightarrow{BY}$ ________

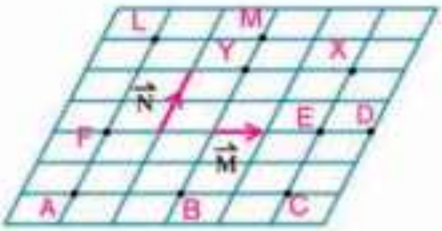
C $\overrightarrow{EC}$ ________ **D** $\overrightarrow{DE}$ ________

E $\overrightarrow{XE}$ ________ **F** $\overrightarrow{XY}$ ________

G $\overrightarrow{YM}$ ________ **H** $\overrightarrow{LM}$ ________

I $\overrightarrow{BM}$ ________ **J** $\overrightarrow{EF}$ ________

K $\overrightarrow{FL}$ ________ **L** $\overrightarrow{FD}$ ________

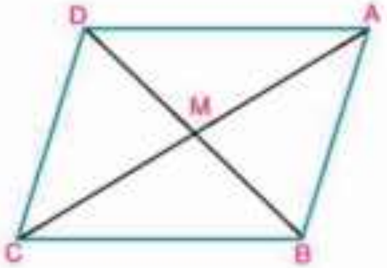


Activité

Tracer $\overrightarrow{M} = (2, \frac{\pi}{4})$ dans un repère orthonormé, puis représenter géométriquement chacun des vecteurs de position suivants par des segments orientés dans le même plan:
$\overrightarrow{A} = 3\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{C} = -2\overrightarrow{M}$

3 - 3 Opérations sur les vecteurs

1 **Dans la figure ci-contre :** ABCD est un parallélogramme , M est le point d'intersection des deux diagonales. Compléter :



A $\overrightarrow{AB} =$ ________ **B** $\overrightarrow{BC} =$ ________

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$ ________ **D** $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} =$ ________

E $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} =$ ________ **F** $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} =$ ________

G $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ ________ **H** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} =$ ________

I $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} =$ ________ **J** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} =$ ________

K $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} =$ 2 ________ **L** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} =$ 2 ________

M $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} =$ ________ **N** $\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BM} =$ ________

2 XYZ, est un triangle, prouver que : $\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} + \overrightarrow{ZX} = \overrightarrow{0}$

____

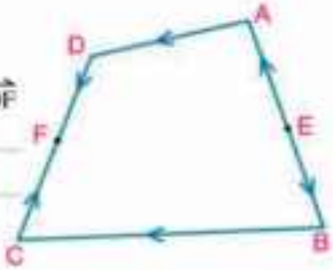
____

3 ABCD est un quadrilatère. Prouver que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

____

____

4 **Dans la figure ci-contre :** ABCD est un quadrilatère tel que, $E \in \overline{AB}$, $F \in \overline{CD}$. Prouver que : $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$



____

____

5 ABCD est un quadrilatère, si $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$, prouver que : ABCD est un parallélogramme.

____

____

6 ABC est un triangle. D est le milieu de $\overline{AB}$, E est le milieu de $\overline{AC}$.
Prouver que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DA}$.

7 ABC est un triangle : D , E et F sont les milieux respectifs de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ et $\overline{CA}$
Prouver que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DC}$

8 ABCD est un trapèze dans lequel $\overline{AD} \mathbin{//} \overline{BC}$, $\frac{AD}{BC} = \frac{2}{3}$. Prouver que : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$

9 Si $\overrightarrow{A} = 3\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$,
trouver :

A $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

B $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$

C $\|\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\|$

D $2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B}$

E $\overrightarrow{A} - 3\overrightarrow{B}$

F $-3\overrightarrow{A}$

10 ABCD est un parallélogramme tel que A(3; 0) , B (0; 4) , D(−2; −1). Trouver les coordonnées du point C.

11 ABCD est un trapèze tel que A(−2; −3) , B (4; −1) , C (2; 5) et D(−1 , k).

A Si $\overrightarrow{AB} \mathbin{//} \overrightarrow{DC}$, trouver la valeur de k.

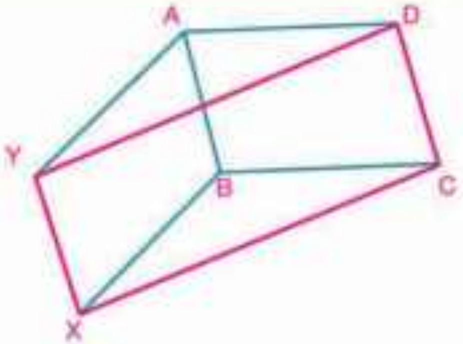
B Prouver que: $\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{AB}$.

C Calculer l'aire du trapèze ABCD.

3 - 4 Applications sur les vecteurs

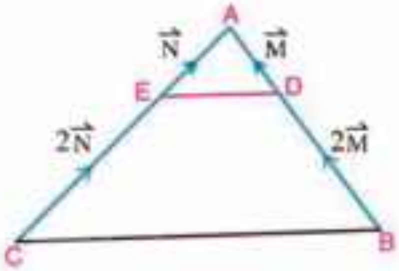
① **Dans la figure ci-contre :**

ABCD et ABXY sont 2 parallélogrammes. En utilisant les vecteurs, prouver que CXYD est un parallélogramme.



② **Dans la figure ci-contre :**

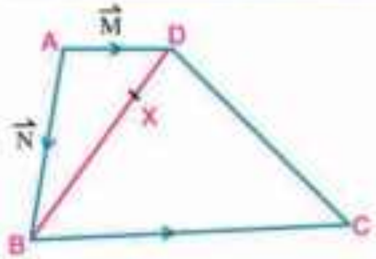
ABC est un triangle dans lequel $D \in \overline{AB}$, $E \in \overline{AC}$.
$\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{M}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{N}$, $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{M}$,
$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{N}$. Déterminer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{M}$ et $\overrightarrow{N}$
Puis démontrer que : $\overline{BC}$ // $\overline{DE}$



③ Dans le triangle ABC , $D \in \overline{BC}$ tel que BD : DC = 3 : 2
Prouver que: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AD}$

④ ABCD est un quadrilatère , si $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, prouver que : ABCD est un parallélogramme

5 ABCD est un trapèze dans lequel $\overline{AD} // \overline{BC}$,



$BC = 3AD$, $\overrightarrow{AD} = \vec{M}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{N}$

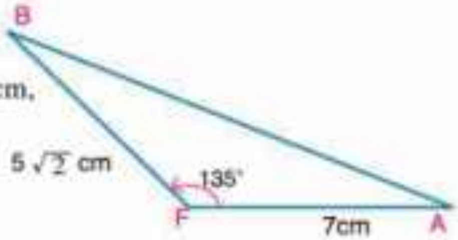
Premièrement: Exprimer en fonction de $\vec{M}$ et $\vec{N}$

chacun de ce qui suit:

$\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DC}$

Deuxièmement: Si $X \in \overline{DB}$ tel que $DX = \frac{1}{3} XB$,
prouver que : A , X et C sont alignés .

6 **Dans la figure ci-contre** :
FAB est un triangle dan lequel FA = 7 cm , FB = $5\sqrt{2}$ cm,
$m(\angle AFB) = 135°$.
Déterminer, en utilisant les vecteurs, la longueur de $\overline{AB}$

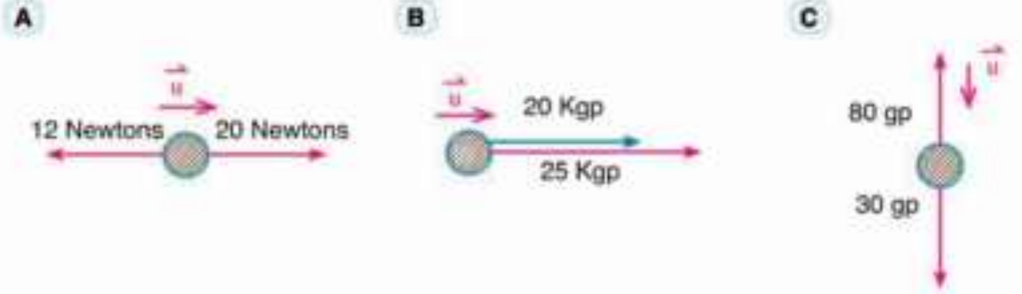


7 Soient A(5; 1) , B (2; 5) , C (−2; 3) et D (−5 ; −4)
En utilisant les vecteurs, prouver que ABCD est un trapèze.

8 Soient A(6; 5), B(8; −3) et C (−2; −5) les sommets du triangle ABC. En utilisant les vecteurs, trouver les coordonnées du point des concours des médianes .

Activité (1)

Premièrement: Exprimer en fonction du vecteur unitaire $\vec{u}$ la résultante des forces dans chaque figure



Deuxièmement: Les 2 forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ sont appliqués en un point matériel , trouver l'intensité et la direction de leur résultante.

A $\mathbf{F_1}$ = 15 N direction Est, $\mathbf{F_2}$ = 40 N direction Ouest.

B $\mathbf{F_1}$ = 34 gp direction Nord, $\mathbf{F_2}$ = 34 gp. direction Sud-Ouest.

C $\mathbf{F_1}$ = 50 Dynes dans le sens 60° direction Nord, $\mathbf{F_2}$ = 50 Dynes 30°direction Sud-Est.

D $\mathbf{F_1}$ = 30 N dans le sens 20° Est - Nord , $\mathbf{F_2}$ = 30 N 70° direction Nord.

Troisièmement:

Forces: $\vec{F_1} = 7\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{F_2} = a\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{F_3} = -4\vec{i} + (b-3)\vec{j}$ sont appliquées en un point. Trouver la valeur de a et b si:

A Leur résultante égale $4\vec{i} - 7\vec{j}$

B les forces sont en équilibre .

Activité (2)

9 Une voiture équipée pour contrôler la vitesse se déplace à 40 km / h. Elle repère une voiture se déplaçant en sens contraire qui lui semble avoir une vitesse de 135 km / h. Si la vitesse autorisée est 100 km / h. Est -ce que la voiture a dépassé la vitesse autorisée ? Justifie

Exercices Généraux

1 Dans un repère orthonormé, le point d'origine O (0; 0). Placer les points A (-4; 0), B (0; -3), C (3; 1), D (2; 8), puis trouver :

A le vecteur de position simple pour chacun des points A, B, C en fonction des vecteurs unitaires de base .

B le vecteur de position simple pour le point D sous forme polaire .

C la norme du segment orienté $\overrightarrow{AB}$.

D la valeur de K qui vérifie l'équation $\overrightarrow{AD} = K\,\overrightarrow{BC}$.

2 Trouver, en fonction des vecteurs unitaires de base, le vecteur qui exprime :

A Une force d'intensité 20 N s'appliquant à un corps dans la direction du Nord

B Déplacement d'un corps de 50 cm avec un angle de 30° nord de l'Ouest

C Vitesse uniforme d'une voiture qui déplace 70 km par heure dans la direction Ouest

3 Si $\vec{A} = (4; -6)$, $\vec{B} = (-6; 9)$ et $\vec{C} = (-3; -2)$,

A Prouver que: $\vec{A} \parallel \vec{B}$, $\vec{B} \perp \vec{C}$, $\vec{C} \perp \vec{A}$

B **Calculer :** $2\vec{A} + \vec{B}$, $\vec{B} - 2\vec{C}$, $\frac{1}{2}\vec{A} + B - 3\vec{C}$

Choisir la bonne réponse

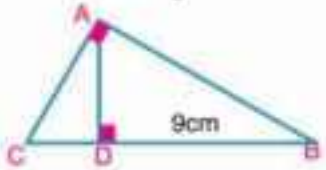
1 La pente de la droite passant par A (3; 4) et B (-1; 2) égale ....

A -2 **B** 2 **C** $\frac{1}{2}$ **D** $-\frac{1}{4}$

2 Dans le triangle A B C. Si $m(\angle A) = 90°$ et $\cos C = 0,6$, alors tg B = ...

A 0.4 **B** $\frac{3}{4}$ **C** $\frac{4}{3}$ **D** $-\frac{4}{3}$

3 **Dans la figure ci-contre :** $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, BC = 12cm, alors AB .... cm



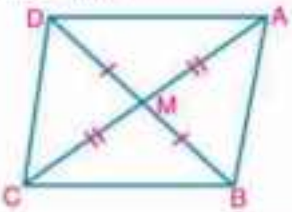
A $8\sqrt{2}$ **B** $6\sqrt{3}$

C $4\sqrt{2}$ **D** 10

4 **Dans la figure ci-contre :** toutes les expressions expriment $\overrightarrow{AC}$ sauf:

A $2\overrightarrow{AM}$ **B** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ **D** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}$



Epreuvedel'unité

(5) Le vecteur $\vec{M} = (12\sqrt{2}\ ,\ \frac{\pi}{4})$ est exprimé en fonction des vecteurs unitaires de base sous la forme : ____

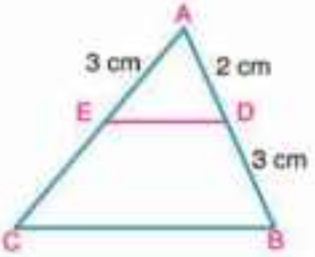
A $6\vec{i} + 6\vec{j}$ **B** $12\vec{i} - 12\vec{j}$
C $-6\,i - 12\vec{j}$ **D** $12\vec{i} + 12\vec{j}$

Questions qui ont une courte réponse:

(6) **Dans la figure ci-contre:** $\overline{DE} // \overline{BC}$

trouver les valeurs de K , L, M , N si :

A $\overrightarrow{BD} = K\ \overrightarrow{DA}$ ____
B $\overrightarrow{CE} = L\ \overrightarrow{CA}$ ____
C $\overrightarrow{BC} = M\ \overrightarrow{ED}$ ____
D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = N\ \overrightarrow{AC}$ ____



(7) ABCD est un parallélogramme, dans lequel A (2; -2) , B (4; -2) et C (2; 3). Trouver les coordonnées du point D.

____

(8) En utilisant les vecteurs, prouver que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux .

____

(9) Dans un repère orthonormé , $\overrightarrow{AB} = (-2; 3)$, $\overrightarrow{CB} = (-6; -4)$, $2\,\vec{B} + \overrightarrow{AC} = (6; 11)$. :

Premièrement: Trouver les coordonnés des points A , B et C

Deuxièmement: calculer l'aire du triangle ABC (en utilisant les vecteurs).

____

____

Épreuve cumulative

(1) Dans un repère orthonormé, le point d'origine O (0; 0). Si A (1; −4) , B(4; 0) , C (−2; 1)et D(1; 5).

A trouver $\|\overrightarrow{AB}\|$, $\|\overrightarrow{CD}\|$.

B prouver que : $\overrightarrow{AB}$ équivalent à $\overrightarrow{CD}$.

C Si $\overrightarrow{BC}$ équivalent à $\overrightarrow{ED}$, trouve les coordonnées du point E.

(2) Si $\overrightarrow{A} = (4; 1)$, $\overrightarrow{B} = (-1; 6)$ et $\overrightarrow{C} = (1; 12)$,

A trouver, en fonction des vecteurs unitaires de base $\overrightarrow{B} - \overrightarrow{C}$, $\frac{1}{2}(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C})$.

B exprimer $\overrightarrow{C}$ en fonction de $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

(3) Si $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{N} = -5\overrightarrow{i} - 10\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{L} = a\overrightarrow{i} + 10\overrightarrow{j}$,
et $\overrightarrow{F} = 2\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$,

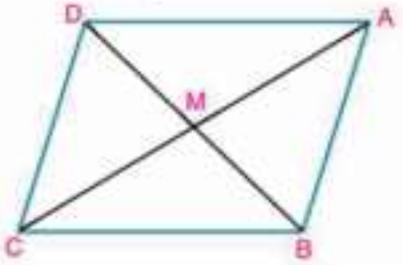
A prouver que: $\overrightarrow{M} \,//\, \overrightarrow{N}$

B trouver a $\in$R, si $\overrightarrow{M} \,//\, \overrightarrow{L}$

C trouver b $\in$R, si $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{N}$.

D est-ce que $\overrightarrow{F} \perp \overrightarrow{M}$? Justifier

(4) **Dans la figure ci-contre:** ABCD est un parallélogramme. M est le point d'intersection des diagonales . Compléter :



A $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ = ______

B $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$ = ______

C $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CM}$ = ______

D $\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{BM}$ = ______

E $\overrightarrow{AB}$ + ______ = $2\,\overrightarrow{AM}$

F $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$ = ______

(5) Si $\overrightarrow{AB} = (1; -4)$, A (2; 3) et C (−1; 15), trouver la valeur de l et m
pour que: $l\,\overrightarrow{A} - m\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{C}$

(6) ABCD est un rectangle tel que A (−1; −2); B (5; 1) et C (3; K). :

Premièrement: Trouver la valeur de K **Deuxièmement:** Trouver les coordonnés du point D

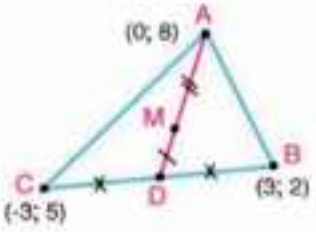
Géométrie Analytique

Unité 4

4 - 1 Partage d'un segment

Premièrement : Compléter ce qui suit

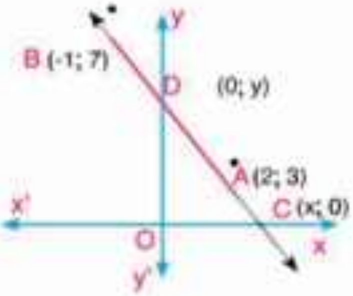
1. **Dans la figure ci-contre:** $\overline{AD}$ est une médiane du triangle ABC, M est le point d'intersection des médianes tel que A(0; 8), B(3; 2) et C(−3; 5)



   A Les coordonnées du point D sont (______ , ______)

   B Les coordonnées du point M sont (______ , ______)

2. **Dans la figure ci-contre :** A (2; 3), B (−1; 7). C et D se trouvent sur les deux axes des coordonnées



   A C partage $\overline{AB}$ ______ et le rapport de partage est ______ : ______

   B D partage $\overline{AB}$ ______ et le rapport de partage est ______ : ______

   C les coordonnées du point C sont (______ , ______)

   D les coordonnées du point D sont (______ , ______)

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes

3. Si A(8; −4) et B(−1; 2), trouver les coordonnées des 2 points qui partagent $\overrightarrow{AB}$ en 3 parties de mêmes longueurs ______________ , ______________

4. Si A(3; 1) et B(− 2; 5), trouver les coordonnées du point C qui partage $\overrightarrow{AB}$ intérieurement du rapport 2 : 3. ______________

5. Si A(1; 3) et B(−4; −2), trouver les coordonnées du point C si C ∈ $\overrightarrow{AB}$ tel que 3AC = 2CB

____

6. Si A(2; 5) et B(7; −1), trouver les coordonnées du point C qui partage $\overrightarrow{AB}$ extérieurement du rapport 3 : 2

____

7. Si C ∈ $\overrightarrow{BA}$, C∉ $\overline{AB}$, A(3; 1), B(4; 2) et AC = 2AB. trouver les coordonnées du point C. ______

8. Si A, B et C sont alignés tels que A(2; 5), B(5; 2) et C(4; y). trouver le rapport dans lequel C partage $\overrightarrow{AB}$ et la nature du partage, puis trouver la valeur de y.

______________ , ______________

Équation de la droite

4 - 2

Premièrement: Compléter ce qui suit

1. Si la droite passant par les points (3; 0) et (0; 2), est parallèle à la droite d'équation $y = ax - 3$; alors a = ______

2. L'équation vectorielle de la droite passant par le point (3; 5) et parallèle à l'axe des abscisses est ______

3. L'équation cartésienne de la droite passant par le point (−2; 7) et parallèle à l'axe des ordonnées est ______

4. L'équation vectorielle de la droite passant par le point d'origine et par le point (1; 2) est ______

5. L'équation de la droite qui forme avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure 45° et qui découpe avec le sens positif de l'axe des ordonnées un segment de 5 unités de longueur ______

6. L'équation cartésienne de la droite qui découpe avec les sens positifs des 2 axes x et y des segments de 2 et 3 unités de longueur respectivement est ______

7. L'aire du triangle unités de longueur qui est limité par l'axe des x , l'axe des y et la droite d'équation $2x + 3y = 6$ est égale à ______

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes

8. Si A (3; −2), B (5; 6) et C (1; −2), trouver la pente de chacune des droites suivantes : $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AC}$ et $\overleftrightarrow{BC}$ ______ , ______ , ______

9. Les équations de 2 droites L_1 , L_2 sont respectivement $2x - 3y + a = 0$ et $3x + by - 6 = 0$
Calculer :
   - **A** la pente de L_1 ______
   - **B** la valeur de (b) pour que L_1 et L_2 soient parallèles ______
   - **C** La valeur de (b) pour que L_1 et L_2 soient perpendiculaires ______
   - **D** Si le point (1; 3), passe par la droite L_1 , déterminer la valeur de a ______

10. Si la droite d'équation $ax - 4y + 5 = 0$ forme avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle dont la tangente = 0;75, trouver la valeur de a. ______

11 Trouver l'équation vectorielle de la droite de pente $\frac{1}{3}$ et passe par le point $(2; -1)$. ______

12 Trouver les 2 équations paramétriques de la droite qui forme avec le sens positif de l'axe des x un angle de mesure $45°$ et passe par le point $(3; -5)$. ______

13 Trouver l'équation vectorielle de la droite passant par les points $(2; -3)$ et $(5; 1)$

______

14 Trouver l'équation générale de la droite passant par les 2 points $(5; 0)$ et $(0; -7)$

______

15 $A(0; 2)$, $B(2; 1)$ et $C(-2; 3)$ sont 3 points du plan. Trouver l'équation vectorielle de la droite $\overleftrightarrow{AB}$, puis montrer que les points A, B et C sont alignés .

______

16 Si $A(5; -6)$, $B(3; 7)$ et $C(1; -3)$, trouver l'équation de la droite qui passe par le point A et par le milieu de $\overline{BC}$.

______

17 Trouver l'équation cartésienne de la droite passant par le point $(3; -5)$ et parallèle à la droite d'équation $x - 2y - 7 = 0$

______

18 Trouver l'équation vectorielle de la droite passant par le point $(5; 7)$ et perpendiculaire à la droite d'équation $\vec{r} = (3 ; 0) + K(4 ; 3)$

______

19 Si $A(1; 4)$ et $B(-4; 6)$, trouver l'équation de la droite qui passe par le point qui partage $\overline{AB}$ intérieurement du rapport $2 : 3$ et perpendiculaire à la droite d'équation $5x - 4y - 12 = 0$

______

20 **Lien à la géométrie:** $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle de centre M. Si $B(-7 , 11)$ et $M(-2 ; 3)$, trouver l'équation de la tangente du cercle en A.

______

21 **Lien à la géométrie:** Si la droite d'équation $3x + 4y - 12 = 0$ découpe l'axe des x et l'axe des y aux points A et B respectivement, trouver :

A l'aire de $(\triangle OAB)$ tel que O est le point d'origine. ______

B l'équation de la perpendiculaire à $\overline{AB}$ et passant par son milieu. ______

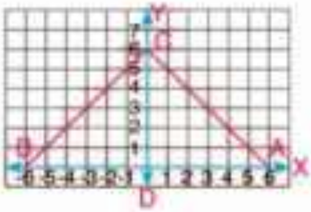
Mesure l'angle de deux droites

4 - 3

Premièrement : Compléter

1. La mesure de l'angle aigu de deux droites de pentes $2\,;-\frac{1}{2}$ est ....
2. La mesure de l'angle de deux droites $x = 3$, $y = 4$ est ....
3. La mesure de l'angle aigu de la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (2;\,2) + k(1;1)$ et la droite d'équation $x = 0$ est ....
4. Si les 2 droites d'équations $ax + 3y - 7 = 0$ et $2x - 3y + 5 = 0$ sont parallèles , alors $a =$ ....
5. Si les 2 droites d'équations $ax + 7y - 9 = 0$ et $7x - 2y + 12 = 0$ sont perpendiculaires, alors $a =$ ....

Deuxièmement : Activité



La figure ci-contre représente un terrain triangulaire de sommets , A (6; 0) , B (-6; 0) et C (0; 6). Compléter :

6. La mesure de l'angle aigu de $\overleftrightarrow{AC}$ et l'axe d'abscisses= ....
7. La mesure de l'angle de deux droites $\overleftrightarrow{AC}$ et $\overleftrightarrow{BC}$ est ....
8. L'équation vectorielle de la droite $\overleftrightarrow{AC}$: ....
9. L'équation vectorielle de la droite $\overleftrightarrow{BC}$: ....
10. L'équation cartésienne de la droite passant par le point C et parallèle à $\overleftrightarrow{AB}$: ....
11. L'aire du triangle ABC est égale à ....

Troisièmement : Choisir la bonne réponse

12. La mesure de l'angle aigu de la droite passant par les points (0, 1) et (-1; 0) et le sens positif de l'axe des x est : ....

    A zéro° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

13. Le mesure de l'angle aigu de la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (0;\,3) + k(1;\,1)$ et la droite d'équation $x = 0$ est égale: à ....

    A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

14 La mesure de l'angle aigu de deux droites d'équations $\sqrt{3}\ x - y = 4$ et $y = 3$ est ______

A 30° **B** 45° **C** 60° **D** 90°

15 La droite perpendiculaire à la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (0; 5) + k(\sqrt{3}\ ; 1)$ forme avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure ______

A 30° **B** 60° **C** 120° **D** 150°

Quatrièmement : Répondre aux questions suivantes

16 Calculer la mesure de l'angle aigu de chacune des paires de deux droites d'équations suivantes :

A $\overrightarrow{r} = (5; 0)$, $x - y + 4 = 0$ ______

B $\overrightarrow{r} = (0; 1) + k(1; 1)$, $2x - y - 3 = 0$ ______

C $y - \sqrt{3}\ x - 5 = 0$, $x - \sqrt{3}\ y - 6 = 0$ ______

17 Prouver que le triangle ABC est rectangle en B sachant que A(5 ; 2) , B(2 ; -2) et

C (- 2; 1), puis calculer son aire. ______

18 Si θ est la mesure de l'angle aigu de deux droites d'équations $x - 6y + 6 = 0$ et $ax - 2y + 4 = 0$. et $\text{tg}\ \theta = \frac{3}{4}$; trouver la valeur de a. ______

19 Si $L_1 : ax - 3y + 7 = 0$; $L_2 : 4x + 6y - 5 = 0$; $L_3 : \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 3$; trouver la valeur de a si:

A $L_1 \mathbin{//} L_3$ ______

B $L_1 \perp L_2$ ______

20 Si la mesure de l'angle aigu de deux droites d'équations $x + ky - 8 = 0$ et $2x - y - 5 = 0$ est égale à $\frac{\pi}{4}$, trouver la valeur de K. ______

21 Le triangle ABC est rectangle en B, tel que A(2; 3) , B(5; 7) et C(1; y) , Trouver la valeur de y et la mesure des deux autres angles. ______

22 ABC est un triangle tel que A(5; 7) , B(1; 5) et C (4; 2)

A Trouver les coordonnées du point D qui partage $\overline{BC}$ intérieurement du rapport 1 : 2

B Prouver que $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ______

C Prouver que AD = BC ______

D Trouver m ($\angle$B) ______

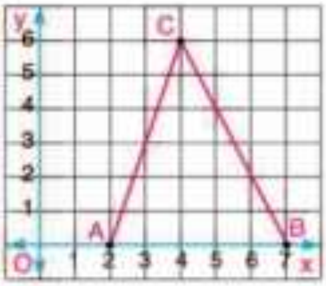
E Calculer l'aire du triangle ABC. ______

Longueur de la perpendiculaire abaissée d'un point à une droite

4 - 4

Activité

Premièrement : Compléter :



① **La figure ci-contre** représente la maison de karim A (2; 0), l'école B (7; 0) et la mosquée C (4; 6): Compléter :

A l'équation de $\overleftrightarrow{AB}$ est ....

B longueur de $\overline{AB}$ = ...

C la distance de la mosquée C et le chemin et aussi entre la maison et l'école ....

D La mesure de l'angle aigu compris des deux droites d'équations $\overleftrightarrow{AC}$ et y = 0 est ....

E Aire (△ ABC) = ...

Deuxièmement : Choisir la bonne réponse

② La distance du point (– 3 ; 5) à l'axe des y est : .... unités de longueur

A 2 B 3 C 5 D 8

③ La distance des deux droites d'équations y – 3 = 0 et y + 2 = 0 = est .... unités de longueur

A 1 B 2 C 3 D 5

④ La distance du point (1 ;1) à la droite d'équations x + y = 0 = est .... unités de longueur

A 1 B $\sqrt{2}$ C 2 D $2\sqrt{2}$

⑤ Si la distance du point (3 ; 1) à la droite d'équation 3x – 4y + c = 0; est égale à 2 unités de longueur, alors c = ...

A Zéro B 3 C 5 D 7

⑥ Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point A à la droite L dans les exercices de A à D

A A (0 ; 0) , L : $\overrightarrow{r}$ = (0 ; 5) + k (3 ; 4) ....

B A (2 ; – 4) , L : 12x + 5y – 43 = 0 ....

C A (5 ; 2) , L : 8x + 15y – 19 = 0 ______

D A (– 2 ; – 1) , L : $\overrightarrow{r}$ = (0 ; – 7) + k (1 ; 2) ______

7. Trouver la longueur du rayon d'un cercle de centre est le point (– 2 ; 5), et il est tangent à la droite d'équation 3x + 4y + 1 = 0

______

8. Trouver la distance du point (1; 5) à la droite passant par les 2 points (5; –3) et (1; 0)

______

9. Prouver que les deux droites d'équations 3x – 4y – 12 = 0 et 6x – 8y + 21 = 0 sont parallèles et déterminer la distance entre elles.

______

______

10. Soient A(4 ; 3) , B(–2 ; 5) et C(– 1 ; –2) les sommets du triangle ABC , tracer $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ tel que $\overline{BD} \cap \overline{AC}$ = {D}

A Prouver que △ ABC est isocèle

B Trouver l'équation de $\overline{BD}$

C Trouver la longueur de $\overline{BD}$

______

______

11. ABCD est un parallélogramme, dans lequel A(– 3 ; 2), B(2 ; 3) et C(5; 7). Trouver les coordonnées du point D, puis calculer l'aire du parallélogramme .

______

______

12. **Lien à la géométrie :** Le centre du cercle est le point d'origine. Deux cordes d'équations 4x – 3y + 10 = 0 et 5x – 12y + 26 = 0. Prouver que ces deux cordes ont même longueur.

______

13. **Lien à la géométrie:** ABCD est un trapèze dans lequel $\overrightarrow{AD}$ // $\overrightarrow{BC}$, Si A(2; 1), B(5; 3), C(6; 1) et D(4; y), trouver la valeur de y, puis calculer l'aire du trapèze ABCD.

4 - 5 Equation générale d'une droite passant par le point d'intersection de deux droites

1. Trouver l'équation vectorielle de la droite passant par le point d'origine et par le point d'intersection des deux droites d'équations $x = 3$, $y = 4$

2. Trouver l'équation vectorielle de la droite passant par le point $(3 , 1)$, et par le point d'intersection des deux droites d'équations $3x + 2y - 7 = 0$ et $x + 3y = 7$

3. Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $\overrightarrow{r} = k(-3 , 2)$, $3x - 2y = 13$ et parallèle à l'axe des ordonnées .

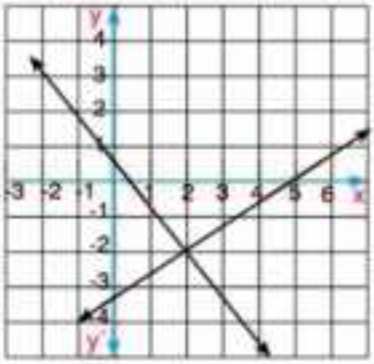
4. Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x + y = 5$, $x + 5y = 16$ et perpendiculaire à la droite d'équation $x - y = 8$

5. Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x - 7y + 9 = 0$, $3x + 2y - 4 = 0$ et perpendiculaire à la première droite.

6. Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x + 3y - 2 = 0$ et $3x - y - 14 = 0$ et formant un angle de mesure 135° avec le sens positif de l'axe de y

Activité

7. Lien à la vie : Deux chemins orthogonaux ,
l'équation du 1er trajet $3x - 4y - 14 = 0$,
l'équation du 2ème trajet $4x + 3y - 2 = 0$
Prouver que les 2 chemins sont perpendiculaires, puis trouver:



A leur point d'intersection

B l'équation de la droite qui passe par ce point et par le point $(3; -2)$

C la distance du point d'intersection de 2 chemins et d'un 3ème chemin d'équation $4x + 3 = 0$

D l'aire de la région triangulaire limitée par ces deux chemins et l'axe des ordonnées

Exercices Généraux

Premièrement : Compléter :

1) La pente de la droite d'équation $2x - 3y + 5 = 0$ est ____________

2) Le vecteur normal à la droits d'équation $\overrightarrow{r} = (2; -1) + k(3; -5)$ est ____________

3) L'équation de la droite passant par le point$(4; 0)$ et qui forme un angle de mesure $135°$ avec le sens positif de l'axe des "x" est ________

4) La droite d'équation $3x + 4y - 12 = 0$ découpe les 2 axes aux points ____________

5) La mesure de l'angle aigu de la droite passant par les 2 points $(0; 2)$ et $(-2; 0)$ et la droite d'équation $y = 0$ est égale à ____________

Deuxièmement; choix multiple:

6) La mesure de l'angle aigu des deux droites d'équations: $x - 3y + 5 = 0$ et $x + 2y - 7 = 0$ est ____________

A $15°$ B $30°$ C $45°$ D $60°$

7) L'équation de la droite passant par le point $(2, -3)$ et parallèle à l'axe des "x" : ________

A $x + 3 = 0$ B $y + 3 = 0$ C $x - 2 = 0$ D $y - 3 = 0$

8) La distance du point d'origine et la droite d'équation $3x - 4y - 15 = 0$ est ________

A 3 B 4 C 5 D 15

9) Toutes les équations suivantes représentent l'équation de la droite passant par les points $(3, 0)$ et $(0, 2)$ sauf l'équation : ____________

A $\overrightarrow{r} = (3; 0) + k\ (3; -2)$ B $\overrightarrow{r} = (0; 2) + k\ (3; -2)$
C $\overrightarrow{r} = (3; 0) + k\ (2; 3)$ D $\overrightarrow{r} = (0; 2) + k\ (-6; 4)$

10) La distance du point $(0; -5)$ à la droite d'équation $x + 7 = 0$ est ______ unités de longueur

A 2 B 5 C 7 D 12

Troisièmement:

11) Si $A(5; 2)$ et $B(-3; 1)$, trouver le rapport dans lequel $\overline{AB}$ est partagé par l'axe des abscisses et déterminer la nature du partage , ____________

12) Trouver la distance du point $A(2; 5)$ à la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (1; -2) + k\ (3; 4)$.

13) Prouver que le triangle ABC est rectangle en B tel que $A(5; 2)$, $B(2; -2)$ et $C(-2; 1)$, puis calculer son aire ____________

Épreuve de l'unité

Premièrement : compléter

1. Le vecteur perpendiculaire normal à la droite d'équation $8x - 7y + 12 = 0$ est ______
2. Si les deux droites d'équations: $2x + by + 3 = 0$ et $\overrightarrow{r} = (0; 2) + k\,(1; 3)$ sont parallèles, alors b = ______
3. L'équation vectorielle de la droite qui passe par le point d'origine et par le point (2; 1) est ______
4. Les 2 équations paramétriques de la droite qui passe par le point (0; 5) et qui forme un angle de mesure 45° avec le sens positif de l'axe de "x" est ______
5. L'équation de la droite qui passe par le point d'origine et par le point d'intersection des deux droites d'équations $x = 3$ et $y = 3$ est ______

Deuxièmement : Choisir la bonne réponse:

1. Les coordonnées du point du milieu de $\overline{AB}$ tel que A(3; 7) et B(1; 5) est: ______
   A (3; 5) **B** (5; −2) **C** (2; 5) **D** (2; 6)
2. L'équation de la droite passant par le point (2, −3) et parallèle à l'axe des x est : ______
   A $x = -3$ **B** $y = -3$ **C** $x = 2$ **D** $y = 3$
3. La mesure de l'angle aigu des deux droites d'équations $x - 3y + 5 = 0$ et $x + 2y - 7 = 0$ est égale à: ______
   A 45° **B** 60° **C** 120° **D** 135°
4. La distance du point d'origine à la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (5; 0) + k\,(4; 3)$ est ______
   A 3 **B** 4 **C** 5 **D** 15
5. L'équation de la droite passant par les points (3; 0) et (0; 2) est: ______
   A $2x + 3y = 6$ **B** $3x + 2y = 6$ **C** $2x + 3y = 0$ **D** $3y + 2x = 0$

Troisièmement : Répondre aux questions suivantes :

1. **A** ABCD est un parallélogramme tel que A(2; 2), B(3; 8) et C(8; 10). Trouver les coordonnées du point D.
   B Trouver l'équation de la droite qui passe par le point (7; 4) et qui est parallèle à la droite de l'équation $3x = 2y$.
2. **A** Prouver que les points A (1; 4), B (3; −2) et C (−3; 16) sont alignés, puis trouver le rapport dans lequel B partage $\overline{AC}$, et la nature du partage .
   B Prouver que les 2 droites d'équations $L_1 : 2x + y - 4 = 0$ et $L_2 : 2x + y + 2 = 0$ sont parallèles, puis déterminer la distance entre elles .
3. **A** Trouver la distance du point (8; −2) à la droite d'équation $\overrightarrow{r} = (0; \frac{1}{3}) + k(-3; 4)$.
   B Si A (−1; 4) et B (5; −2), trouver les coordonnés du point C qui partage $\overline{AB}$ intérieurement du rapport 1 : 2.
4. **A** Si A (2; 4), B (−7; 5), C (−3; 0) et D (−2; 9) sont les sommets d'un carré, calculer son aire.
   B Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x + y = 5$; $x - y = 1$ et par le point (5; 3).

5 - 1 Identités Trigonométriques

Premièrement: choix multiple

1. $\frac{\text{tg}\,\theta\,\text{cotg}\,\theta}{\sec\theta}$ sous la forme la plus simple égale : .... :

   A $\sin\theta$ B $\cos\theta$ C $\sec\theta$ D $\text{cosec}\,\theta$

2. $\sin\theta\cos\theta\,\text{tg}\,\theta$ sous la forme la plus simple égale ....

   A $\sin^2\theta$ B $\cos^2\theta$ C $\text{tg}^2\theta$ D $1-\sin^2\theta$

3. $\sin(90^\circ-\theta)\,\text{cosec}\,(90^\circ-\theta)$ sous la forme la plus simple égale : ....

   A 1 B $\sin^2\theta$ C $\cos^2\theta$ D $\sin\theta\cos\theta$

4. $\frac{1-\cos^2\beta}{\sin^2\beta-1}$ sous la forme la plus simple : ....

   A $-\text{tg}^2\beta$ B $-\text{cotg}^2\beta$ C $\text{tg}^2\beta$ D $\text{cotg}^2\beta$

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes

5. Prouver les identités suivantes :

   A $\text{tg}\,\mu+\text{cotg}\,\mu=\sec\mu\,\text{cosec}\,\mu$

   B $\text{cosec}\,\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha\,\text{cotg}\,\alpha$

   C $\text{cotg}^2\mu-\cos^2\mu = \text{cotg}^2\mu\cos^2\mu$

   D $\text{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\text{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$

   E $\sin^2\alpha+\text{tg}^2\alpha\sin^2\alpha=\text{tg}^2\alpha$

   F $\sin(90^\circ-\mu)\cos\mu=1-\sin^2\mu$

6. Prouver les identités suivantes :

   A $\frac{\text{cosec}\,\theta}{\cos\theta}(1-\sin^2\theta)=\text{cotg}\,\theta$

   B $\frac{1}{\sin^2(90^\circ-\theta)}-\text{tg}^2\theta=1$

   C $\frac{1}{1+\text{tg}^2\alpha}-\frac{1}{1+\text{tg}^2\beta}=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$

   D $\frac{1+\text{tg}^2\theta}{\sec^4\theta}=1-\sin^2\theta$

   E $(\sec\phi-\text{tg}\,\phi)^2=\frac{1-\sin\phi}{1+\sin\phi}$

   F $\frac{1}{1+\text{cotg}\,\theta}=\frac{\text{tg}\,\theta}{1+\text{tg}\,\theta}$

   G $\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\sin\theta\cos^2\theta+\cos\theta\sin^2\theta}=\text{cosec}\,\theta-\sec\theta$

Résolution des équations Trigonométriques

5 - 2

Premièrement : Compléter

1. La solution générale de l'équation $\cos\theta = 1$ est ....

2. La solution générale de l'équation $\sin\theta = 1$, $\theta \in [\pi, 2\pi[$ est ....

3. La solution générale de l'équation $\sin\theta = \cos\theta$ est ....

4. L'ensemble solution de l'équation $\text{cotg}\,\theta = \sqrt{3}$, $\theta \in [\pi, 2\pi[$ est ....

Deuxièmement : Choix multiple

5. Si $0° \leqslant \theta < 360°$, $\sin\theta + 1 = 0$, alors $\theta =$ ....

   A $0°$ **B** $90°$ **C** $180°$ **D** $270°$

6. Si $0° \leqslant \theta < 360°$, $\cos\theta + 1 = 0$, alors $\theta =$ ....

   A $90°$ **B** $180°$ **C** $270°$ **D** $360°$

7. Si $0° \leqslant \theta < 180°$,$\sqrt{3}\ \text{tg}\,\theta - 1 = 0$, alors $\theta =$ ....

   A $30°$ **B** $60°$ **C** $120°$ **D** $150°$

8. Si $180° \leqslant \theta < 360°$, $2\cos\theta + 1 = 0$, alors $\theta =$ ....

   A $210°$ **B** $240°$ **C** $300°$ **D** $330°$

Troisièmement : Répondre aux questions suivantes

9. Trouver la solution générale de chacune des équations suivantes.

   A $\sin\theta = \frac{1}{2}$ ....

   B $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$ ....

   C $\sqrt{3}\ \text{tg}\,\theta - 1 = 0$ ....

10. Trouver la solution de chacune des équations suivantes dans l'intervalle $[0, \frac{3\pi}{2}[$:

   A $\text{tg}^2\theta - \text{tg}\,\theta = 0$ ....

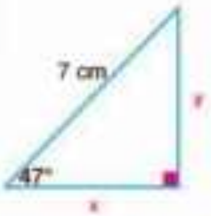
   B $2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$ ....

   C $2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$ ....

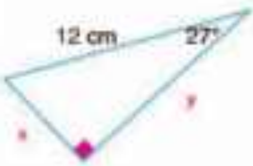
5 - 3 Résolution d'un triangle rectangle

1 Trouver la valeur de x et y dans chacune des figures suivantes

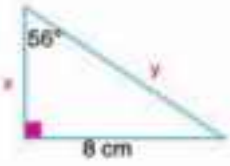
A



B

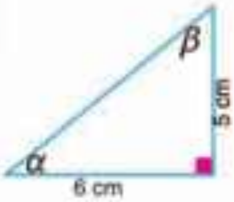


C

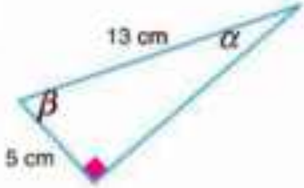


2 Trouver la valeur de des angles α et β en degrés dans chacune des figures suivantes:

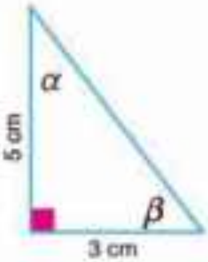
A



B



C



3 Résoudre le triangle ABC rectangle en B, (approcher les mesures des angles à un degré près et les longueurs des côtés (à un cm près)):

A AB = 4 cm, BC = 6 cm

B AB = 12;5 cm, BC = 17;6 cm

C AB = 5;3 cm, AC = 12;2 cm

D BC = 31 cm, AC = 42 cm

4 Résoudre le triangle ABC rectangle en B (approcher) les mesures des angles en radians, à 3 décimales près, et les longueurs des côtés à 3 décimales près en cm):

A $m(\angle A) = 0{,}925^{rad}$. $BC = 8$ cm **B** $m(\angle A) = 1{,}169^{rad}$. $AB = 18$ cm

C $m(\angle C) = 0{,}646^{rad}$. $AC = 15{,}7$ cm **D** $m(\angle C) = 1{,}082^{rad}$. $AC = 35{,}8$ cm

5 ABC est un triangle, trace $\overrightarrow{AD} \perp \overline{BC}$ tels que $\overrightarrow{AD} \cap \overline{BC} = \{D\}$, Si $AD = 6$ cm, $m(\angle B) = 52°$ et $m(\angle C) = 28°$, Trouver la longueur de $\overline{BC}$ (à un cm près).

6 **Lien à la géométrie:** $\overline{AB}$ est un diamètre d'un cercle, $AB = 20$cm, tracer la corde $\overline{AC}$ telle que $AC = 12$cm. Trouver les mesures des angles du triangle ABC.

7 **Lien à la géométrie:** Un terrain à la forme d'un losange ABCD de côté 12 m de longueur, $m(\angle ABC) = 100°$. Trouver la longueur de ses diagonales $\overline{AC}$ et $\overline{BD}$ (à un mètre près).

8 **Lien à la géométrie:** ABCD est un trapèze isocèle, $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$, $AB = CD = 5$cm, $AD = 4$cm, $BC = 10$cm. Trouver la mesure de chacun de ses angles.

5 - 4

Angles d'élévation et d'abaissement

1. La longueur de fils d'une feuille d'un cerf-volant est 42 m. Si l'angle formé par le fils avec le sol horizontal mesure 63°, calculer, à 1m près, l'altitude du cerf-volant. ________

2. D'un point situé à 42m de la base d'un minaret. On a mesuré l'angle d'élévation du sommet du minaret = 52°. Trouver la hauteur du minaret (à 1 m près). ________

3. Du sommet d'une montagne de 1820 mètres d'hauteur, une personne a mesuré l'angle d'abaissement d'un point sur le sol = 68°. Trouver la distance entre ce point et la personne à 1 mètre près. ________

4. L'une d' extrémités d'une échelle est posée sur un mur vertical à 3,8 m du sol. L'autre extrémité de l'échelle est posée sur le sol horizontal. Si l'angle d'inclinaison de l'échelle par rapport au sol mesure 64°. Trouver à 2 décimales prés:

   A la distance entre l'extrémité inférieure au mur **B** la longueur de l'échelle

   ____

5. Du sommet d'une maison de 8m de hauteur, une personne a mesuré les angles d'abaissement et d'élévation d'une autre maison en face et les a trouvé 28° et 63°, respectivement. Trouver la hauteur de l'autre maison à 1mètre près.

   ____

6. D'un point est situé à 140 m de la base d'un minaret, on a trouvé que la mesure de l'angle d'élévation est 26° 46'. Trouver la hauteur du minaret à 1 mètre prés. Si on mesure la hauteur de ce minaret d'un point situé à 110 m de sa base, quelle est la mesure de l'angle d'élévation (à une minute près)?

   ____

7. Une personne a trouvé la mesure de l'angle d'élévation d'un ballon fixe est $\frac{\pi}{6}$. Si cette personne parcourt vers le ballon sur un plan horizontal une distance de 800 m, il a trouvé que l'angle d'élévation est $\frac{\pi}{4}$. Calculer la hauteur du ballon (à 1m près). ________

8. Un bateau s'approche d'un phare de 50m de hauteur. A un moment, donné, on a mesuré l'angle d'élévation du phare qui est égale à $0{,}11^{rad}$, 15 minutes après, on a mesuré l'angle d'élévation du phare qui est égale à $0{;}22^{rad}$. Calculer la vitesse du bateau sachant que la vitesse est uniforme .

   ____

Secteur circulaire

5 - 5

Premièrement : Compléter ce qui suit

1. L'aire du secteur circulaire, si $l = 6$ cm, $r = 4$ cm, est égale à ....
2. L'aire du secteur circulaire, si $r = 4$ cm et son périmètre = 20cm, est égale à ....
3. Le périmètre du secteur circulaire d'aire 24 cm² et $l =$ 8 cm, est égale à ....

Deuxièmement : Choix multiple

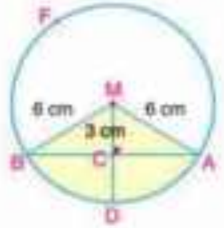
1. L'aire d'un secteur circulaire d'angle $1{,}2^{rad}$ et rayon 4 cm est égale à ....
   - **A** 4;8 cm²   **B** 9;6 cm²   **C** 12;8 cm²   **D** 19;6 cm²
2. Le périmètre d'un secteur circulaire si $l = 4$cm et le la longueur du diamètre du cercle = 10 cm est ....
   - **A** 14 cm   **B** 20 cm   **C** 30 cm   **D** 40 cm
3. L'aire du secteur circulaire d'angle 120° et la longueur du rayon 3 cm est égale à ....
   - **A** 3π cm²   **B** 6π cm²   **C** 9π cm²   **D** 12π cm²
4. L'aire du secteur circulaire de périmètre 12 cm et $l = 6$cm, est égale à ....
   - **A** 6 cm²   **B** 9 cm²   **C** 12 cm²   **D** 18 cm²
5. Si l'aire d'un secteur circulaire est 110 cm² et son angle mesure $2{;}2^{rad}$, alors la longueur du rayon = ...
   - **A** 2 cm   **B** 5 cm   **C** 10 cm   **D** 20 cm

Troisièmement : Répondre aux questions suivantes

1. Trouver l'aire du secteur circulaire si la longueur du diamètre du cercle = 20cm et son angle mesure 120°. ....
2. La longueur de l'arc d'un secteur circulaire est 16cm et la longueur de son rayon = 9cm. Trouver son aire. ....
3. La longueur de l'arc d'un secteur circulaire est 7cm , son périmètre est 25cm . Trouver son aire. ....
4. **Lien à l'agriculture:** Un bassin de fleur sous la forme d'un secteur circulaire d'aire 48 m² et la longueur de son arc est 6m . Trouver son périmètre et la longueur du son rayon. ....
5. Le périmètre d'un secteur circulaire = 24 cm , $l = 10$ cm. Trouver l'aire du cercle où se trouve ce secteur. ....

5 - 6 Segment circulaire

1. **Dans la figure ci-contre compléter**:



M est un cercle de rayon 6cm , $\overline{MC} \perp \overline{AB}$, M C = 3 cm:

- **A** La hauteur du petit segment circulaire ADB = ________ cm
- **B** La hauteur du grand segment circulaire AFB = ________ cm
- **C** Mesure de l'angle du petit segment circulaire ADB = ______°
- **D** Mesure de l'angle du grand segment circulaire AFB = ______°
- **E** L'aire du triangle MAB = ________ cm^2.
- **F** L'aire du secteur circulaire MADB, en fonction de π = ________ cm^2.
- **G** L'aire du petit segment circulaire en, fonction de π = ________ cm^2.

2. **Trouver l'aire du segment circulaire si,**

- **A** la longueur du rayon = 12 cm et la mesure de l'angle = $1{,}4^{rad}$.

____

- **B** la longueur du rayon = 8cm et la mesure de l'angle= 135°.

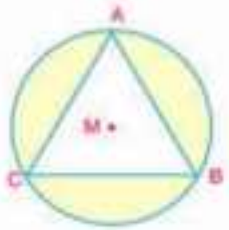
____

- **C** la longueur du rayon = 14cm et la longueur de l'arc = 22 cm.

____

3. **Dans la figure dessinée:**

ABC est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle M du rayon 8cm. Trouver l'aire de chaque segment circulaire colorée.



____

4. Trouver l'aire du grand segment circulaire si la longueur de la corde du rayon = 12cm.

____

5. **Trouver l'aire du segment circulaire si:**

- **A** la longueur de rayon = 5cm et la longueur de la corde = 6cm.

____

- **B** la longueur du rayon = 10cm et la longueur de sa hauteur = 5cm.

____

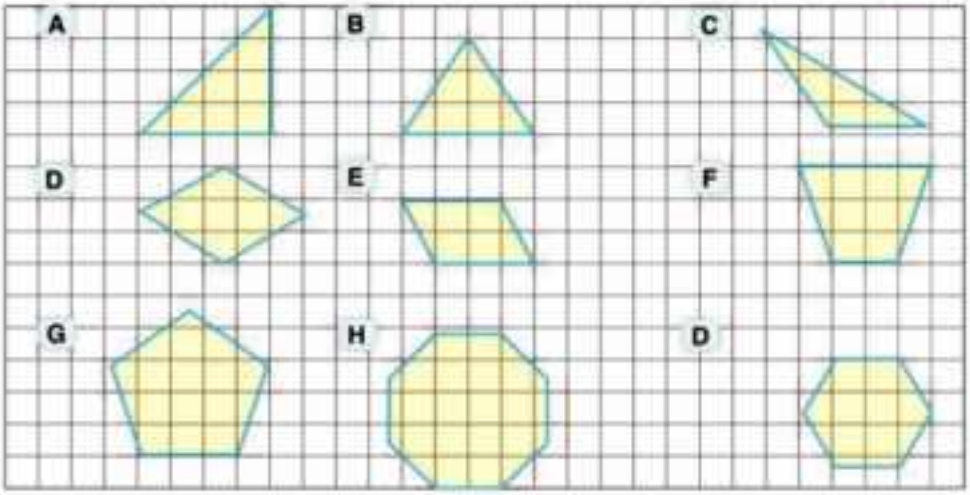
6. Une corde de 8cm de longueur distante de 3cm du centre du cercle . Trouver l'aire du petit segment circulaire .

____

Aires

5 - 7

1. Trouver l'aire de chacune des figures suivantes telle que l'unité de l'aire est □.



2. Trouver l'aire du triangle ABC dans chacun des cas suivants:

A A B = 6cm, B C = 8cm et m($\angle$ B) = 90°

B A C = 12cm, et la longueur de la hauteur issue de B sur $\overline{AC}$ = 7 cm.

C A B = 16cm, B C = 20 cm et m($\angle$ B) = 46°

D A B = 8cm, B C = 7cm et A C = 11cm.

---

3. **Trouver l'aire de la figure ABCD dans chacun des cas suivants :**

A ABCD est un parallélogramme tel que A B = 8cm, B C = 11cm et m($\angle$ B) = 60°

B ABCD est un trapèze, les longueurs des côtés parallèles $\overline{AD}$ et $\overline{BC}$ sont 7 et 11 cm respectivement . Las longueur de la hauteur issue de D sur $\overline{BC}$ = 6cm.

C ABCD est un losange dans lequel AB = 8cm et la mesure de l'angle des deux côtés consécutifs = 58°.

4. Trouver l'aire de chacun de polygones réguliers suivants (Approcher le résultat à 1 décimale près)

A Un pentagone régulier du côté 16cm de longueur.

B Un hexagone régulier du côté 12cm de longueur.

5. **Construction:** La figure ci-contre représente l'escalier menant à la rentrée d'une grande maison à la forme d'un trapèze isocèle de bases 7m et 3 m. La mesure de l'angle de la base = 75° Trouver :

A la longueur de la base moyenne.

B la longueur des deux côtés (à 1 décimale près) .

C l'aire du trapèze (à 1 m près).

6. **Aquarium:** Un aquarium dont la base est un pentagone régulier de diagonale de 72 cm de longueur . Trouver l'aire de sa base .

7. **Fleurs:** Ahmed décide de faire un bassin de fleurs sous la forme d'un hexagone régulier d'aire $54\sqrt{3}$ m². Trouver la longueur de son côté.

Exercices Généraux

1 Simplifier chacun de ce qui suit:

A $\sin(-\theta)\ \text{cosec}\ (\theta)$ ____________ **B** $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - \frac{2}{\sec\theta\ \text{cosec}\ \theta}$ ____________

C $\sin\theta\ \text{cosec}\ \theta - \cos^2\theta$ ____________ **D** $\cos^2\theta\ \sec 0\ \text{cosec}\ \theta$ ____________

E $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)\ \sec(-\theta)$ ____________

2 Vérifier les identités suivantes:

A $\cos(180° + \theta)\ \text{cosec}\ (90° + \theta) = -1$ **B** $\sec\theta - \sin\theta\ \text{tg}\ \theta = \cos\theta$

C $\text{tg}^2\theta + \text{cotg}^2\theta - (\sec^2\theta + \text{cosec}^2\theta) = -2$ **D** $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2 = 2$

3 Trouver l'ensemble solution de chacune des équations suivantes dans $[0, 2\pi[$

A $2\sin\theta - 1 = 0$ **B** $\sqrt{3}\ \text{cotg}\ \theta = 1$ **C** $2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$

____________ ____________ ____________

4 Trouver la solution générale des équations suivantes :

A $\text{tg}\ \theta - \sqrt{3} = 0$ **B** $\cos 5\theta = \sin 4\theta$ **C** $\sec 4\theta = \text{cosec}\ 2\theta$

____________ ____________ ____________

5 Résoudre le triangle A B C rectangle en B si :

A $m(\angle A) = 43°$ et B C = 12 cm **B** A B = 12;8 cm et B C = 19;2 cm

____

6 La forme la plus simple du $\frac{1 - \sin^2\theta}{1 - \cos^2\theta}$ est ____________________ :

A -1 **B** 1 **C** $\text{tg}^2\ \theta$ **D** $\text{cotg}^2\ \theta$

7 L'ensemble solution de l'équation $\sqrt{3}\ \text{tg}\ \theta = 1$ sur $0° < \theta < 270°$ est: ____________

A 30° **B** 150° **C** 210° **D** 240°

8 On peut résoudre un triangle rectangle dans tous ces cas sauf :

A Les longueurs de 2 côtés donnés

B Les longueurs de deux côtés et la mesure d'un angle donnés

C Les mesures de 2 angles donnés **D** la longueur d'un côté et l'hypoténuse

9 Si l'aire d'un secteur circulaire est $48 cm^2$ et la longueur de son arc= 12cm, alors la longueur de son rayon = ____________

A 4cm **B** 8cm **C** 12cm **D** 16cm

10 L'ensemble solution de l'inéquation $x^2 > 4$ est: ____________

A $[-2; 2]$ **B** $]-2; 2[$ **C** $\mathbb{R} - [-2; 2]$ **D** $\mathbb{R} -]-2; 2[$

Épreuve de l'unité

Premièrement : Compléter ce qui suit:

1. La forme la plus simple de $(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 2\sin\theta\cos\theta =$ ....
2. Si $2\sin X - \sqrt{3} = 0$ et $X \in]0; \pi[$, alors $m(\angle X) =$ ....
3. Si $\cos(90° - \theta) = 1$, alors la solution générale de l'équation est ....
4. L'aire du secteur circulaire de périmètre 12cm et la longueur de son arc est 4cm = ...
5. Si x est la longueur du côté d'un triangle équilatéral d'aire $9\sqrt{3}\ cm^2$, alors x = ... cm.

Deuxièmement : Choix multiple

6. La forme la plus simple de $\sin(90° - \theta)\ \text{cosec}\ (180° - \theta) =$: ....
   - A -1
   - B 1
   - C $\sin\theta$
   - D $\text{tg}\theta$
7. La forme la plus simple de $\sin^2\theta + \cos^2\theta - \text{cosec}^2\theta$ est :
   - A Zéro
   - B 1
   - C $-\text{cotg}^2\theta$
   - D $\text{tg}^2\theta$
8. Si $\theta \in [0; \pi[$, et $\cos\theta + 1 = 0$; alors $\theta =$ ....
   - A Zéro
   - B $\frac{\pi}{2}$
   - C π
   - D 2π
9. Un secteur circulaire d'aire $45cm^2$ et la longueur de son arc est 3cm , alors la longueur de son rayon =
   - A 15cm
   - B 30cm
   - C 22,5 cm
   - D 90cm
10. La solution générale da l'équation: $\text{cotg}(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sqrt{3}$ est .... où $n \in \mathbb{Z}$
    - A $\frac{\pi}{3} + n\pi$
    - B $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$
    - C $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi$
    - D $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ou $\frac{4\pi}{3} + 2n\pi$

Troisièmement : Répondre aux questions suivantes:

11. A Prouver que $(1 - \sin\theta)(\sec\theta + \text{tg}\,\theta) = \cos\theta$
    B Trouver l'ensemble solution de l'équation $2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$ sur l'intervalle $[0; \pi[$
12. A Résoudre le triangle ABC rectangle en B , AB = 6cm, AC = 8cm et $m(\angle C) = 42°$.
    B Trouver l'aire du segment circulaire dont la longueur du rayon est 12 cm et longueur de l'arc est 20 cm. ....
13. A Trouver la solution générale de l'équation : $\cos 5\theta = \sin\theta$ ....
    B Du sommet d'un rocher de 100m de hauteur, une personne observe une voiture avec un angle d'abaissement de 25° . Trouver la distance entre la personne et la voiture à un mètre prés. ....
14. A La mesure de l'angle d'un secteur circulaire est 48° et son rayon = 6cm. Trouver son aire à $1cm^2$ prés.
    B Trouver, à $1cm^2$ près, l'aire du quadrilatère ABCD de diagonales de longueurs 12 et 16 cm . La mesure de l'angle des diagonales = 62°. ....

Épreuves Généraux

Premier Epreuve (Algèbre et trigonométrie)

Premièrement : Choisir la bonne réponse parmi les réponses données :

1. Le point qui appartient à l'ensemble solution des inéquations suivantes: $x > 2$, $y > 1$ et $x + y \geqslant 3$ est:
   A (2; 1) B (1; 2) C (3; 2) D (1; 3)

2. Si A est une matrice de dimension 1×3, ${}^tB$ est une matrice de dimension 1×3, alors on peut effectuer les opérations suivantes :
   A $A + B$ B ${}^tB + {}^tA$ C $A\,B^t$ D $A\,B$

3. La solution des deux équations $2x - 3y = 1$, $3x + 2y = 7$ est :
   A (1; 2) B (2; 1) C (2; 3) D (3; 2)

4. Le périmètre d'un secteur circulaire est 10cm, la longueur de son arc est 2cm, alors son aire = ... cm²:
   A 4 B 8 C 10 D 20

5. L'ensemble solution de l'équation $\sin X + \cos X = 0$ tel que $180° < X < 360°$ est:
   A {210°} B {225°} C {240°} D {315°}

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes :

6. A Résoudre le système suivant en utilisant les matrices .
   $2x - 3y = 4$, $3x + 4y = 23$
   B Vérifier l'inéquation: $\sin\theta \sin(90° - \theta)\, \text{tg}\theta = 1 - \cos^2\theta$

7. A Calculer l'aire du triangle dont les sommets sont (−4; 2), (3; 1), (−2; 5) en utilisant les déterminants.
   B Trouver l'ensemble solution de l'équation $2\sin X + 1 = 0$ tel que $X =]0; 2\pi[$

8. A Trouver la valeur de x qui vérifie l'équation $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & x \\ 5 & 2 & x \end{vmatrix} = 3$
   B Du sommet d'un phare de 50 m de hauteur , on a mesuré l'angle d'abaissement d'un bateau 35°. Trouver la distance entre le bateau et le sommet du phare.

9. A $\overline{AB}$ est une corde de longueur 8cm opposée à un angle au centre de mesure 60°. Trouver, à 1 décimale près, l'aire du petit segment circulaire de la corde $\overline{AB}$.
   B Trouver l'ensemble solution des inéquations suivantes graphiquement :
   $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + 3y \leqslant 7$, $3x + 4y \leqslant 14$
   Puis trouver les valeurs de x et y qui font la fonction :
   $P = 30x + 50y$ soit maximale.

Épreuves Généraux

Deuxième Epreuve (Algèbre et trigonométrie)

Premièrement : Choisir la bonne réponse parmi les réponses données:

1. Soit la matrice A de dimension 2×3; ${}^tB$ de dimension 1×3; alors la matrice AB est de dimension:

   A 3×3 **B** 3×1 **C** 2×1 **D** 1×2

2. Le point qui appartient à l'ensemble solution des inéquations suivantes :
   $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $2x + y < 4$, $x + 3y < 6$ est:

   A $(1; -3)$ **B** $(3; 0)$ **C** $(2; 3)$ **D** $(1; 1)$

3. Si $\begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10$; alors $x =$

   A 2 **B** 3 **C** 4 **D** 5

4. La forme la plus simple de : $1 + \text{cotg}^2\,\theta$ est .... :

   A $\sin^2\theta$ **B** $\cos^2\theta$ **C** $\sec^2\theta$ **D** $\text{cosec}^2\,\theta$

Deuxièmement: Répondre aux questions suivantes:

5. **A** Résoudre le système d'équations linéaires suivantes par la méthode de Cramer:
   $2x - 3y = 3$, $x + 2y = 5$

   B Vérifier l'identité $\dfrac{\cos X \times \text{tg}\, X}{\text{cosec}\, X} = 1 - \cos^2 X$

6. **A** Trouver la matrice A qui vérifie la relation : $A \times \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$

   B Trouver la solution générale de l'équation: $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{2}$

7. **A** Si ${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, prouver que $A^2 - 5A + 2I = \square$

   B La mesure de l'angle au centre d'un segment circulaire est 90° . Son aire est 56 cm². Trouver son rayon.

8. **A** D'un point du sol situé à 50 m d'un poteau vertical. On a mesuré l'angle d'élévation qui est 19° 24'. Trouver, à 1m près, la hauteur du poteau .

   B Trouver la valeur maximale de la fonction objective $R = 2x + y$ sous les contraintes suivantes :
   $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$
   $2x + 3y \leqslant 18$, $-4x + y \geqslant -8$

Troisième Epreuve (Algèbre et trigonométrie)

Premièrement : Choisir la bonne réponse parmi les réponses données :

1. Si la dimension de la matrice A est 3×3; alors le nombre d'éléments de A est:
   A 3 B 6 C 9 D 12
2. Le point qui appartient à l'ensemble solution des deux inéquations suivantes $2x + y < 4$, $x + 3y < 6$ est :
   A $(1; -4)$ B $(2; 1)$ C $(1; 2)$ D $(3; -1)$
3. Le point qui appartient à l'ensemble solution des inéquations suivantes $x > 2$, $y > 1$, $x + y \geqslant 3$ est:
   A $(3; 1)$ B $(1; 2)$ C $(3; 2)$ D $(1; 3)$
4. La solution générale de l'équation $\cos\theta = 1$ est: où $n \in Z$
   A $n\pi$ B $2n\pi$ C $\frac{\pi}{2} + n\pi$ D $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$
5. L'aire d'un triangle équilatéral de côté 6cm est égale "a":
   A $6\sqrt{3}\ cm^2$ B $9\sqrt{3}\ cm^2$ C $12\sqrt{3}\ cm^2$ D $18\sqrt{3}\ cm^2$

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes :

6. A Trouver a , b, c et d si: $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ....

   B Vérifier l'identité: $\frac{\text{cotg } C}{1 + \text{cotg}^2 C} = \sin C \times \cos C$
7. A Trouver l'aire d'un triangle dont les sommets sont $(2; 4)$, $(5; 2)$, et $(-3; -2)$ en utilisant les déterminants.

   ....

   B Trouver la solution générale de l'équation $\cos 2\theta = \sin\theta$

   ....
8. A Si $Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, démontre que $Y^2 - 2Y - 3I = \boxed{}$

   B Trouver l'aire d'un pentagone régulier de côté 10 cm de longueur à 1 cm^2 près.

   ....
9. A La longueur de l'arc d'un secteur circulaire est 7cm, son périmètre est 25cm. Trouver son aire. ....

   B Une usine produit deux genres de trompette, pour fabriquer le 1^er^ , il faut 25 unités de cuivre et 4 unités de nickel. Le 2^ème^ : 15 unités de cuivre et 8 unités de nickel . La quantité stockée dans l'usine est 95 unités de cuivre et 32 unités de nickel. Si le bénéfice de l'instrument du 1^er^ genre est 60 LE. et celui du 2^ème^ genre est 48 LE. Trouver le nombre d'instruments qui il faut fabriquer de chaque genre pour réaliser le bénéfice maximal.

Épreuves Généraux

Quatrième Epreuve (Géométrie)

Premièrement : Compléter ce qui suit:

1. Si $\overrightarrow{A} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{B} = 3\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$, alors $2\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}$ = ...

2. Si $\overrightarrow{A} = (-2; 1)$ et $\overrightarrow{C} = (-3; K)$ sont parallèles, alors K = ...

3. Si A = (-4; 4), B = (5; -8) et $C \in \overline{AB}$ tel que AC : CB = 2 : 1; alors les coordonnées du point C = (........ , ...)

4. Si les deux droites d'équations l_1: $3x - 2y + 7 = 0$; l_2: $ax + 3y + 5 = 0$ sont perpendiculaires, alors a = ...

5. L'équation vectorielle de la droite passant par le point (2; -3) dont le vecteur directeur est (3; 4) , est ....

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes :

6. **A** Si $\|-8\overrightarrow{A}\| = 5\|K\overrightarrow{A}\|$, trouver la valeur de K.

   B Trouver la distance du point (1; 2) à la droite d'équation $5x - 12y - 7 = 0$

7. **A** ABCD est un quadrilatère , E est le milieu de $\overline{AB}$ et F est le milieu de $\overline{CD}$. Démontrer que $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{EF}$

   B Trouver l'équation de la droite passant par le point(5, 3) et par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x + y = 5$, et $\overrightarrow{r} = (1; 0) + k\,(1; 1)$.

8. **A** Si le point C (2; 5) partage $\overrightarrow{AB}$ du rapport 4 : 1, et A (8; 3). Trouver les coordonnées du point B.

   B Prouver que le triangle dont a les sommets sont Y (4; 2), X(3; 5) et Z(-5; -1), est rectangle en Y, puis calculer l'aire du cercle passant par ses sommets.

9. Si l_1 : $3x + 2y - 7 = 0$; L_2: $2x - 3y + 4 = 0$; trouver :

   A La mesure de l'angle aigu des deux droites L_1 et L_2.

   B l'équation vectorielle de la droite passant par le point d'intersection de L_1, L_2 et par le point (3; 4).

Cinquième Epreuve

(Géométrie)

Premièrement : Compléter ce qui suit:

1. Si $\overrightarrow{A} = (2; 3)$, $\overrightarrow{B} = (-1; 2)$, alors $\overrightarrow{AB} =$ ....

2. Si $\overrightarrow{A} = (4; 2)$, $\overrightarrow{B} = (1; -2)$, alors $\|\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B}\| =$ ....

3. Si A $(-3; 4)$ et B $(6; -8)$, alors l'axe des abscisses partage $\overline{AB}$ du rapport ...... : ......

4. La mesure de l'angle aigu des deux droites de pente $\frac{1}{2}$ et $-2 =$ ....

5. La distance du point $(1; 1)$ à la droite d'équation $x + y = 0$ est égale à ....

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes :

6. **A** Si $K \|4\overrightarrow{A}\| = \|-3\overrightarrow{A}\|$, trouver la valeur de K.

   B Trouver l'équation de la droite passant par $(-1; 0)$ et par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x - y + 4 = 0$ et $x + y + 5 = 0$

7. **A** Si A $(3; 4)$, B $(5; -1)$ et C $(2; -2)$ sont les sommets du parallélogramme ABCD, Trouver les coordonnées du point D.

   B Montrer que les deux droites d'équation $\overrightarrow{r} = (0; 4) + k\,(1; -2)$ et $2x + y + 2 = 0$ sont parallèles, puis calculer la distance entre elles.

8. **A** Si $A = (-1; 4)$, $B = (5; -1)$, trouver les coordonnées du point C qui partage $\overline{AB}$ intérieurement du rapport 2 : 1.

   B Un cercle de centre est le point d'origine. Montrer que les deux cordes d'équations: $3x + 4y + 10 = 0$ et $5x - 12y + 26 = 0$ ont même longueur.

9. ABCD est un trapèze dans lequel $\overline{AD} \mathbin{/\!/} \overline{BC}$. Si $A(7; -1)$, $B(3; -1)$, $C(2; 1)$ et $D(5; y)$:

   A Trouver la valeur de y.

   B Trouver l'aire du trapèze ABCD.

Épreuves Généraux

Sixième Epreuve (Géométrie)

Premièrement : Compléter ce qui suit:

1. Si $\overrightarrow{A} = (-1; 5)$, $\overrightarrow{B} = (2; 1)$, alors $\|\overrightarrow{AB}\| =$ ________.
2. Si $\|3K\overrightarrow{A}\| = \|-15\overrightarrow{A}\|$, alors K = ________.
3. Si le point (3; 6) est le milieu de $\overline{AB}$ tel que A(−3; 7), alors les coordonnés du point B sont (____ , ____)
4. Si (6; 4) et (3; M) sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires, alors M = ________.
5. L'équation de la droite passant par les deux points (2; 0) et (0; −3) est ________.

Deuxièmement : Répondre aux questions suivantes :

6. **A** Soient A (2; 2), B (4; −2), C (−2; 0) et D (1; K). $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$ sont perpendiculaires , Trouver la valeur de K.

   B Si A(2; 3) et B(−2; 1), trouver le rapport dans lequel $\overrightarrow{AB}$ est partagé par l'axe des abscisses, puis calculer les coordonnées du point de partage.

7. **A** ABCD est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent en N. M est un point du plan. Prouver que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MN}$.

   B Trouver l'équation de la droite passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $2x - 7y + 9 = 0$ et $3x + 2y - 4 = 0$ et qui forme avec le sens positif de l'axe des abscisses un angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

8. **A** Si A(3; 5), B (−1; M) et $\|\overrightarrow{AB}\| = 4$; trouver la valeur de M.

   B $\overline{AB}$ est un diamètre du cercle M. Si B (−7; 11) et M (−2; 3), trouver l'équation de la tangente au cercle en A.

9. Si la droite d'équation $4x - 3y = 12$ découpe l'axe des abscisses aux points A et B, trouver:

   A l'aire du triangle OAB tel que O est le point d'origine.

   B la distance du point d'origine à le droite $\overleftrightarrow{AB}$.

Réponses de Quelques Exercices

Leçon (1) Matrices

Leçon (1−1)

1 B 1- 56, distance entre 2 villes B, C

2- 0, distance entre ville C est elle −même ,

3- la valeur est la −même

E $x_{11} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{33} = 0$

F 1- 3×3 2- pour chaque $i, j \in \{1, 2, 3\}$

3 A $a = 0,\ b = 2,\ c = 2,\ d = 6$

B $a = 5,\ b = 5,\ c = 0,\ d = 10$

5 $a = 2,\ b = 2$ 6 $d = 1,\ c = 1$

8 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, ${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Leçon 1−2

2 A Impossible

B Possible, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 8 & 14 & 0 \end{pmatrix}$

5 C $a = 16,\ b = 6,\ c = 4,\ d = 8$

Exercice 1 − 3

3 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ A et B ne sont pas des matrices nulles

Exercice 1 − 4

1 A -1 B -7 C 15

D $B(a + x) - A(b + y) = bx - ay$

E $(x + 1)(y^2 + 1) - (y + 1)(x^2 + 1) = xy^2 + x + y^2 + yx^2 + y - x^2$

F -1 G -84 H 636 I -1

2 A $x = 1,\ y = -1$, E.S. $= \{(1, -2)\}$

B $x = 3,\ y = 2$, E.S. $= \{(3, 2)\}$

C $x = -1,\ y = 2$, E.S. $= \{(-1, 2)\}$

3 12 unités carrées   4 $22\frac{1}{2}$ unités carrées

Exercice 1 − 5

2 A $a = 2$ B $a = \pm 6$

C $a = -2,\ a = 4$ D $a = 1$ or $a = 2$

6 A $x = 2,\ y = 6$, E.S. $= \{(2, 6)\}$

B $x = 5,\ y = 1$, E.S. $= \{(5, 1)\}$

C $x = 48,\ y = -8$, E.S. $= \{(48, -8)\}$

7 Replacer les points dans l'équation. :

$5 + a = c$ et $1 + 3a = c \therefore a = 2,\ c = 7$

Réponse des exercices générales

4 A $x = 4,\ y = -1$ B $a = 3,\ b = 1$

6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

7 A $a = 1,\ b = 3,\ c = 3,\ d = -6$

11 A s.s $= \{(4; -1)\}$ B s.s $\{(3; -1)\}$

C s.s $= \{(\frac{13}{6}, \frac{10}{6})\}$

Unité 2 : Programmation linaire

Leçon (2 − 1)

2 A $(3; 9)$ B $(0; 1)$

Leçon (2 − 2)

4 Soit x le nombre de questions de A, Y le nombre de questions de B. Ecris le système des inéquations linéaires:

$x \geq 4$ (tu réponds que moins 4 questions de (A))

$y \geq 3$ (tu réponds moins que 3 questions de (B))

$x + y \geq 10$ (il faut répondre à 10 questions au moins 60 min) x et y entiers positifs

$4x + 5y \leq 60$ (le temps des réponses ne dépassé pas 60 min)

x et y représente le nombre de questions ainsi ils doivent être positifs .

5 A plusieurs réponses. $y \geq x,\ y \leq x$

B Car les points de la droite frontière $2x - y = 2$ ne sont pas de solution des systèmes

Leçon (2 - 3)

3 A Valeur minimale : 7

B Valeur maximale : 14

Exercice générale

1 A Juste. ex. $5 > 3$ alors $25 > 9$

B Faix. car $a^2 > b^2$ et .

$-5 > -8$ et $25 < 64$

C Juste . car. : $5 > 3$ et $\frac{1}{5} < \frac{1}{3}$

$-9 > -12$ alors $-\frac{1}{3} < -\frac{1}{12}$

D Faux : le symbole de l'inéquation ne change pas $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

ex. $-2 < 2$. alors $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$

2 A $]3, \infty[$ B $]1, 2]$

Examen de l'unité

2 Valeur min 0, valeur max 20

3 45 min courir, 15 min marche

Unité 3: vecteurs

Leçon (3-1)

2 A 1   B 3   C 3

D 1   E 2   F 2

3 A $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{ED}$ B $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OE}$

C $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{AO}$

4 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$,

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MD}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DM}$,

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CM}$

5 $D = (-3\,;-8)$, $M\,(0; -7)$, $N\,(0; 7)$

6 A $\|\overrightarrow{AB}\| = 5$, $\|\overrightarrow{CD}\| = 5$

B $M(-2; -1)$, $N\,(9; 6)$, $R\,(-5; 1)$

Leçon (3−2)

1 $\overrightarrow{A} = (3; -4),\ \|\overrightarrow{A}\| = 5$ $\overrightarrow{B} = (-12; 5),\ \|\overrightarrow{B}\| = 13$

$\overrightarrow{C} = (-3; -6),\ \|\overrightarrow{C}\| = 3\sqrt{5}$

2 A $\overrightarrow{M} = -4\,\overrightarrow{i} - 3\,\overrightarrow{j}$, $\|\overrightarrow{M}\| = 5$

B $\overrightarrow{M} = 8\,\overrightarrow{i} - 6\,\overrightarrow{j}$, $\|\overrightarrow{N}\| = 10$

C $\overrightarrow{F} = -5\,\overrightarrow{i} - 12\,\overrightarrow{j}$, $\|\overrightarrow{F}\| = 13$

D $\overrightarrow{A} = 2\sqrt{2}\,\overrightarrow{j}$, $\|\overrightarrow{A}\| = 2\sqrt{2}$

3 A $\overrightarrow{M} = (16, \frac{5}{6})$ B $\overrightarrow{N} = (6, \frac{3}{4})$

5 A $\overrightarrow{Z} = -60\,\overrightarrow{i}$

B $\overrightarrow{F} = 10\sqrt{2}\,\overrightarrow{i} - 10\,\overrightarrow{j}$

7 A $a = -6$ B $b = -3$

8 A $2\overrightarrow{M}$ B $4\overrightarrow{N}$ C $-2\overrightarrow{N}$ D $-\overrightarrow{M}$

Leçon (3−3)

1 A $\overrightarrow{DC}$ B $\overrightarrow{AD}$ C $\overrightarrow{AC}$ D $\overrightarrow{AD}$

9 A $2\,\overrightarrow{i} - 6\,\overrightarrow{j}$

B $4\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j}$ C $2\sqrt{10}$

10 $C\,(-5\,;3)$

11 A $K = 4$ B 30 unit of area

Réponses des Modèle

Leçon (3–4)

2 $\overrightarrow{BC} = 3(\overrightarrow{M} - \overrightarrow{N})$

6 13 cm **8** (4; −1)

Exercice générale

1 A $\overrightarrow{D} = (2\sqrt{17}, 76°)$ B $\| \overrightarrow{AB} \| = 5$

2 A $\overrightarrow{F} = 20\overrightarrow{j}$ C $\overrightarrow{Z} = -70\overrightarrow{j}$

3 A (2; −3), (0; 13), (5; 12) **4** (0; 3)

6 Premièrement: A (3; −1), B (1; 2), C (7; 6)
Deuxièmement: 13 unités carrées

Examen de l'unité:

1 A $\| \overrightarrow{AB} \| = 5$; $\| \overrightarrow{CD} \| = 5$ B E (7 , 4)

2 A $-2\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j}$; $9\overrightarrow{j}$
B $\overrightarrow{C} = \frac{18}{25}\overrightarrow{A} + \frac{47}{25}\overrightarrow{B}$

3 A a = 5 B −1

5 L = −4 ; M = 3

6 Premièrement: K = 5
Deuxièmement: D (−3; 2)

Epreuve cumulative:

1 C **2** B **3** B **4** C **5** D

6 A $K = \frac{3}{2}$ B $L = \frac{1}{3}$
C $M = -\frac{5}{2}$ D $N = \frac{4}{3}$

10 A (2; 5) , (5; −2) **11** $(8; \frac{8}{3})$

12 $3\sqrt{5}$ unité d'aire

Unité 4: Droite

Leçon (4-1):

1 A $(0 ; \frac{7}{2})$ B (0 ;5)

2 A Extérieurement dans le rapport 3 : 7
B Intérieurement dans le rapport 2 : 1
C $(\frac{17}{4} ; 0)$ D $(0; \frac{13}{2})$

3 (5 , −2) , (2 ;0) **4** $C = (1 ; \frac{13}{3})$

5 C = (−1 ; 1) **6** (17 ; −13)

7 (1 ; −1) **8** 2 : 1 ; 3

Leçon (4 – 2):

1 $\frac{-2}{3}$ **2** $\overrightarrow{r} = (0 ; 5)$

3 x + 2 = 0 **4** $\overrightarrow{r} = K\,(1; 2)$

5 y = x + 5 **6** 3x + 2y − 6 = 0

7 3 **8** 4 ; zéro , 2

9 $\frac{2}{3}$; $-\frac{9}{2}$; −2 , 7 **10** 3

11 $\overrightarrow{r} = (5 ; 0) + k(3 ; 1)$ **12** x = 3 + k ; y = −5 + k

13 $\overrightarrow{r} = (5 ; 1) + k(3 ; 4)$ **14** x − 5 y − 35 = 0

16 8 x + 3 y − 22 = 0 **17** x + 2 y + 7 = 0

Leçon (4 – 3):

1 90° **2** 90° **3** 45° **4** −2

6 45° **7** 90° **8** $\overrightarrow{r} = (6; 0) + K(1, -1)$

9 $\overrightarrow{r} = (-6; 0) + K(1; 1)$ **10** y = 6

11 36 unité d'aire **12** B

13 B **14** C **15** C

16 A 45° B 18° 26' C 30°

17 12;5 **18** $\frac{-28}{7}$ **19** 2; $\frac{9}{2}$ **20** $\frac{1}{3}$

21 10 ; 45° ; 45° **22** (2 ; 4) , 12 °52 '36 '' ; 9 unités d'aire

Leçon (4-4):

1 A y = 0 B 5 C 6 unités
D 71° 33' 54'' E 15

2 A B **3** D **4** B **5** C

6 A 3 B 3 C 3 D $2\sqrt{5}$

10 x + y − 3 = 0 ; $4\sqrt{5}$ **11** (6; 0) , 17

12 Longueur de la corde

13 K = 2, y = −3 longueur de la perpendiculaire = $\frac{3}{\sqrt{5}}$, Aire = $\frac{9}{2}$

Leçon (4 – 5):

1 $\overrightarrow{r} = K\,(3, 4)$

2 $\overrightarrow{r} = (1; 3) + K\,(-2; 1)$ **3** x − 3 = 0

4 x + y − 4 = 0 **5** 35x + 10y − 28 = 0

6 x − y − 2 = 0

Unité 5 : trigonométrie

Leçon (5 – 1)

1 B **2** A **3** D **4** A

5 A −1 B −1 C 1 D 1

6 A $\cos^2\theta$ A $\cos\theta$ C −1 D $\cos\theta$
E −2 F 2 G $tg^2\theta$ H $cotg^2\theta$

Leçon (5 – 2)

6 D **7** A **8** A

9 A $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5}{6}\pi + 2\pi n$ tel que n ∈ Z
B $2\pi n \pm \frac{\pi}{6}$ tel que n ∈ Z C $\frac{\pi}{4} + \pi n$; tel que n ∈ Z

10 A 0; 2π; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5}{4}\pi n$ B 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$ C $\frac{7}{6}\pi$

Leçon (5 – 3)

1 A x = 5cm , y = 9,4cm
B y = 9,4cm , x = 10;7cm

2 A $\alpha = 45°$, $\beta = 45°$
B $\alpha = 55° 91'$, $\beta = 34° 50' 59''$

3 A A C = 7cm, m(∠ A) = 56°, m(∠C) = 34°

Leçon (5 – 4)

1 37 m **2** 54 m

3 735 m **4** 1.85m, 4;23 m

5 Distance = 15 m, hauteur du minaret = 30 + 8 = 38 m

6 Hauteur du minaret = 71 m, 33° 50'

Leçon (5 – 5)

1 14cm **2** 24cm² **3** 20cm

4 B 9;6 cm² **5** A **6** A

7 B

Exercice 5 – 6

1 A 3cm B 9cm C 120° D 240°

3 $\theta = \frac{11}{7}$; aire = 56cm² **4** 9;06 cm²

7 43;34cm² **8** 8;588cm²

9 61.42cm² **10** 11;18cm²

Exercice 5 – 7

1 A 8 unités d'aire B $4\sqrt{3}$ unités d'aire

2 A 24 unités d'aire B 42 unités d'aire

Exercice générale

1 A −1 B 1 C $-tg^2\theta$

4 A $\frac{\pi}{3} + 2n\pi$ or $\frac{4}{3}\pi + 2n\pi$

Epreuve cumulative

1 D $cotg^2\theta$ **2** C 210°

3 C c. mesure de deux angles donnés

4 B 8cm **5** C 12cm

6 B]−2; 2[

8 A $\sin^2\theta$ B $cotg\,\theta$ C 1

شركة أخبار اليوم للاستثمار

المقاس	عدد الصفحات بالغلاف	ورق المتن	ورق الغلاف	طباعة المتن	طباعة الغلاف	التجليد	رقم الكتاب
١/٨ (٥٧×٨٢)	٢٠٤	٨٠ جرام	٢٠٠ جرام	٤ لون	٤ لون	بشر	١٥٨٥/١٠/١٥/٢٢/١/٨٣

شركة أخبار اليوم للاستثمار